Cours 6 Fluides parfaits

Introduction :

La matière existe sous 3 états : solide (s), liquide (l) et gaz (g).
La mécanique nous a permis de décrire la physique des corps solides. La thermodynamique et la mécanique des fluides nous permettent d'étudier les fluides qui comprennent les liquides et les gaz. Alors que dans le cours précédent, nous avons étudié les gaz en utilisant principalement le modèle des gaz parfaits, nous allons dans les deux chapitres suivants nous intéresser aux liquides plus principalement. Dans ce premier chapitre nous nous intéresserons aux fluides parfaits (c'est-à-dire en négligeant leurs propriétés visqueuses) alors que dans le suivant nous aborderons les fluides visqueux.

I.Rappels:

1. Masse volumique ρ:

Elle est caractéristique du matériau.
Pour un liquide incompressible elle est **constante**.

$$\rho=\frac{m}{V}$$

Unités SI : kg.m^{-3}

2. Densité d :

La densité d'un liquide est le rapport de sa masse volumique à celle de l'eau.

$$d=\frac{\rho}{\rho_{eau}}$$ avec $\rho_{eau} = 10^3$ kg.m^{-3}.

La densité est sans dimension.

3. Pression P:

$$P=\frac{F}{S}$$ P est exprimée en Pascal (Pa).

II. Statiques des fluides :

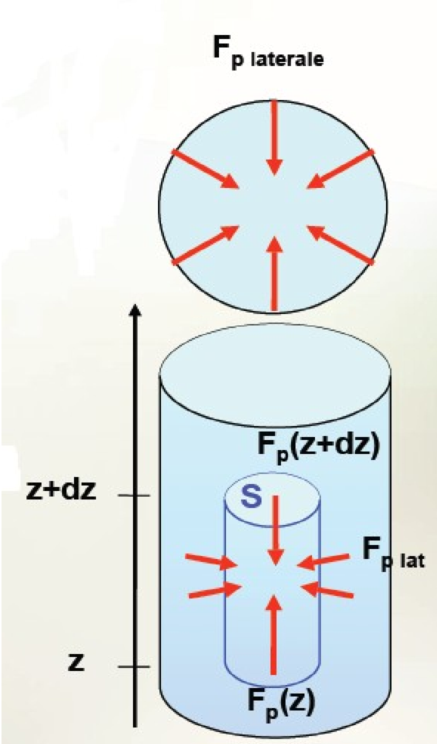
1. Pression uniforme hors pesanteur

Les effets de la pesanteur sont négligeables si la dimension verticale est faible. La pression est alors identique dans toutes les directions.

2. Variation de pression et pesanteur

En pratique, la dimension verticale ne sera quasiment jamais assez faible pour qu'on puisse négliger l'effet de la pesanteur.

Au repos la colonne de liquide est en équilibre, les efforts qui s'exercent sur elles se compensent.



Bilan des forces:

- forces de pression latérales qui se compensent → $\sum(F_p lat)=\vec{0}$
- forces de pression verticales et le poids

$$\vec{F}_p+\vec{F}_p(z+dz)+\rho\, V\,\vec{g}=\vec{0}$$

on rappelle que $\vec{P}=m\,\vec{g}=(\frac{m}{V})\times V\,\vec{g}=\rho\, V\,\vec{g}$

En projetant sur l'axe des z ascendant on a :

$$P(z)S-P(z+dz)S-\rho\, S\, dz\, g=0$$

On effectue un DL (cf cours du professeur Arnoux):

$$P(z+dz)\approx P(z)+\frac{dP}{dz}dz$$

On obtient donc : $S(\frac{dP}{dz})dz+\rho\, S\, dz\, g=0 \quad \rightarrow \quad \frac{dP}{dz}+\rho\, g=0 \quad \rightarrow \quad dP+\rho\, g\, dz=0$

Dans un fluide la pression augmente donc quand on descend et diminue quand on monte.

Il en découle une loi fondamentale: **la loi de l'hydrostatique des fluides**

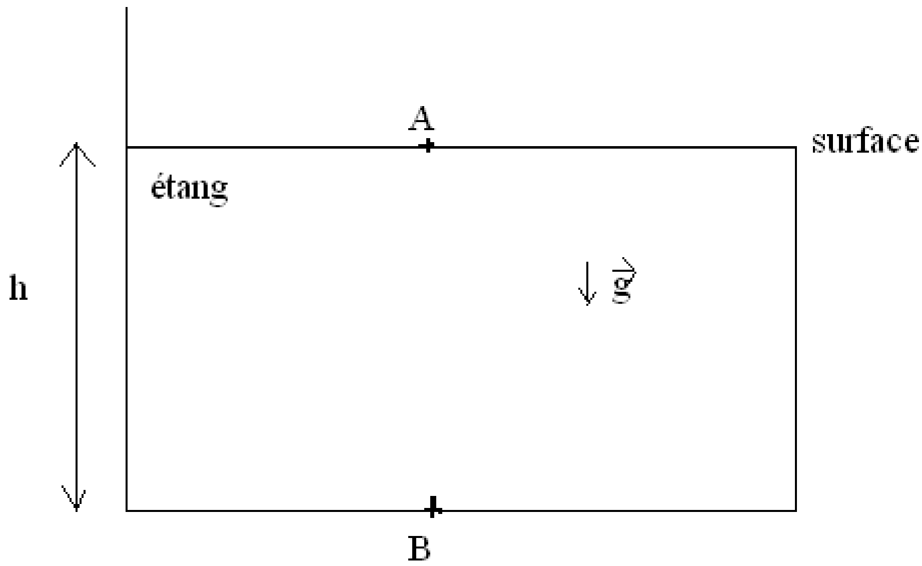
$$dP=-\rho\, g\, dz$$

On considère le liquide comme **incompressible** → ρ = cste
On intègre l'équation précédente entre P_1 et P_2 et z_1 et z_2:

$$\int dP=\int -\rho\, g\, dz \quad \rightarrow \quad P_2-P_1=-\rho\, g(z_2-z_1) \quad \rightarrow \quad P_2+\rho\, g\, z_2=P_1+\rho\, g\, z_1$$

Application :

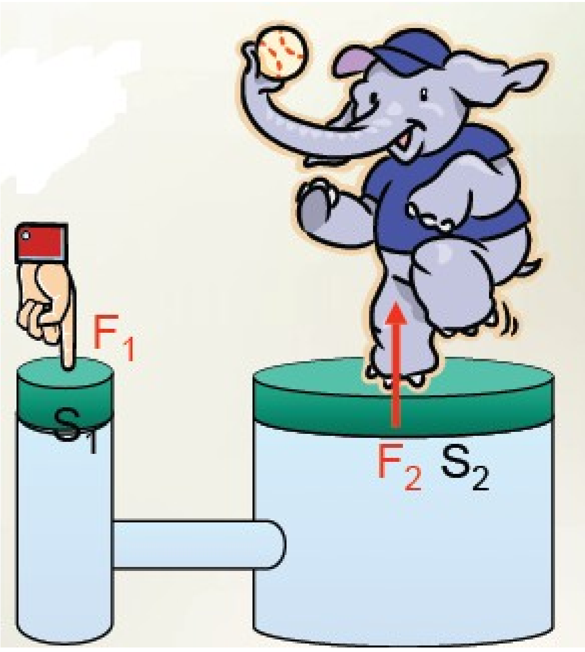
On cherche à déterminer la pression au fond d'un étang dont la profondeur est de h = 50m.
On nous donne la pression à la surface P(A) = Patm = 1 atm.



P(A) = 1 atm = 10^5 Pa
D'après la loi fondamentale de l'hydrostatique on a :
P(B) = P(A) + ρgh
AN : P(B) = $10^5 + 10^3 * 10 * 50 = 10^5 + 10^3 * 500 = 10^5 + 5.10^5 = 6.10^5$ Pa

3. Théorème de Pascal

La pression se transmet intégralement dans un liquide incompressible à tous les points de même altitude.
Exemple des leviers hydrauliques:



Si on applique une force F_1 de 100N sur la surface S_1 = 5 cm², quelle est la pression P_1 transmise au liquide ?

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{100}{5.10^{-4}} = 2.10^5\ Pa$$

On peut en déduire l'intensité de la force F_2 qu'exerce le fluide sur la surface S_2 = 500cm².
Les liquides incompressibles transmettent intégralement en tout point les variations de pression.

$$F_2 = P_1 \times S_2 = 2.10^5 \times 500.10^{-4} = 10\,000\ N$$

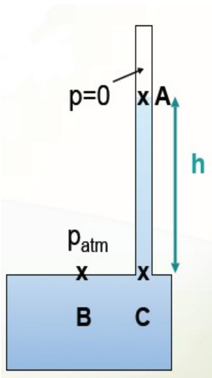
Cas général:

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1} = P_2 = \frac{F_2}{S_2}$$ $P_1 = P_2$ car les deux surfaces sont à la même altitude et que le liquide est incompressible.

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \gg F_1$$ Car $S_1 \ll S_2$

4. Différents exemples d'application :

- le baromètre (tube à vide renversé sur du mercure d(Hg)= 13,55)



P(B) = Patm (contact à la surface libre)
P(B) = P(C) = Patm (les points B et C sont à la même altitude)
la loi fondamentale de l'hydrostatique donne:
P(C) = P(A) + ρgh or P(A) = 0 car cette partie contient du vide
P(C) = Patm = ρgh

$$h = \frac{Patm}{\rho} g = \frac{(1{,}01.10^5)}{(13{,}6.10^3 \times 9{,}8)} = 0{,}76\ m$$

→ on retrouve la correspondance des unités de pression exposées dans le chapitre de thermodynamique : 1 atm = 760 cm de Hg = 1 bar = 10^5 Pa = pression au niveau de la mer

Peut-on boire avec une paille depuis un pont de hauteur H = 15 m ? (en considérant que la dépression maximale au niveau de la bouche est $P_{bouche} \approx 0$).

$$P_{atm} = P_{bouche} + \rho_{eau} gH$$

$$H = \frac{(P_{atm} - P_{bouche})}{\rho_{eau}} g = \frac{10^5}{(10^3 \times 9{,}8)} = 10\, m$$

→ on ne peut donc pas boire avec une paille depuis un pont de 15m de haut (mais de 10m oui ☺).

<u>Calcul de masse volumique:</u>

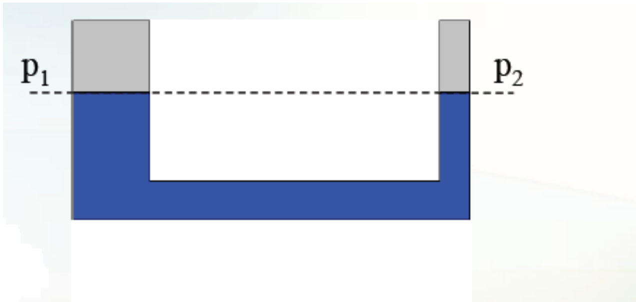
$$P_1 = P_{atm} + \rho_1 gh_1$$

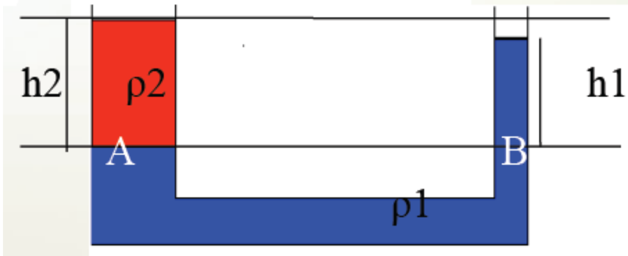
$$P_2 = P_{atm} + \rho_2 gh_2$$

$$P_1 = P_2$$

$$\rho_1 gh_1 = \rho_2 gh_2$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}$$

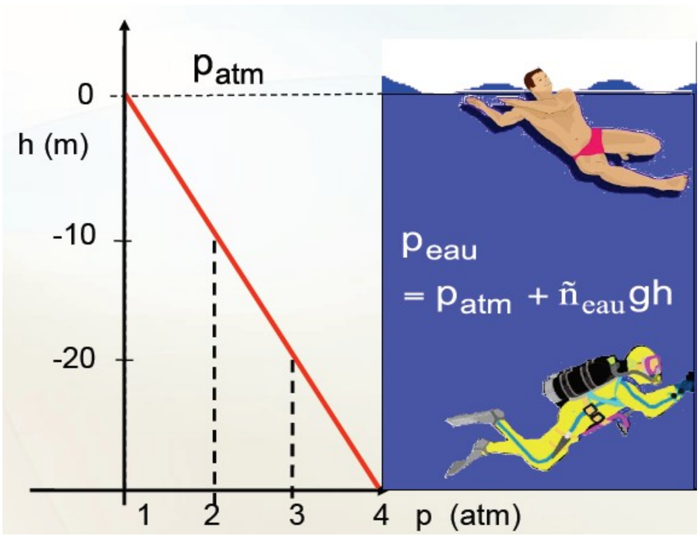




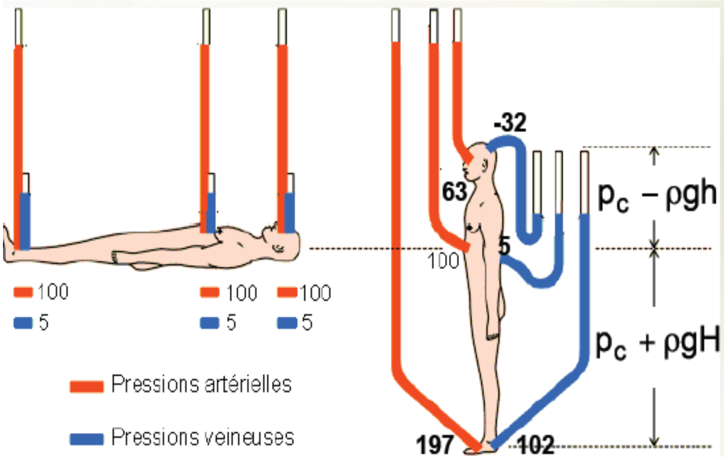
<u>Cas de la plongée:</u>

$$P_{eau} = P_{atm} + \rho_{eau} gh$$

La pression augmente de 1 atm quand on descend de 10m.



4. Pressions sanguines

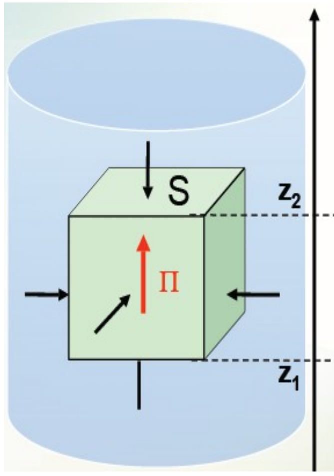


On exprime toujours la pression médicale en fonction de la pression atmosphérique. On parle de tension et on l'exprime en cm de Hg.

$$T = P_{médicale} = P - P_{atm}$$

Les pressions cardiaques sont induites mécaniquement et sont indépendantes de la position (assise ou couchée).
P♥(aorte) ≈ 100 mmHg
P♥(veine cave) ≈ 5 mmHg
Pour calculer les autres pressions artérielles ou veineuses, on utilise la loi fondamentale de l'hydrostatique.

6. Poussée d'Archimède



On considère un solide S en équilibre dans un fluide de masse volumique ρ_{liq}. Comme ce corps est en équilibre, toutes les forces qui s'exercent sur ce solide se compensent, les forces latérales se compensant également, il existe une force qui compense le poids appelée la poussée d'Archimède. La poussée d'Archimède subit par un corps est toujours égale et opposée au poids du fluide déplacé.

$$\sum \vec{F}_{lat} = \vec{0}$$

$$P_1 - P_2 = \rho_{liq}\, g\,(z_2 - z_1)$$

$$\vec{\pi} = \vec{F}_{P1} + \vec{F}_{P2} = \rho_{liq}\, g S\,(z_1 - z_2)\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\pi} = -\rho_{liq}\, V\,\vec{g}$$

Si toute la banquise fond le niveau de la mer montera-t-il?

La banquise flotte, elle est donc en équilibre, on peut écrire: $\vec{P} + \vec{\pi} = \vec{0}$

$$\leftrightarrow \quad \rho_{glace}\, V_{glace}\,\vec{g} - \rho_{eau}\, V_{immergé}\,\vec{g} = \vec{0}$$

$$\leftrightarrow \quad V_{immergé} = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau}}\, V_{glace} = 0{,}9\, V_{glace}$$

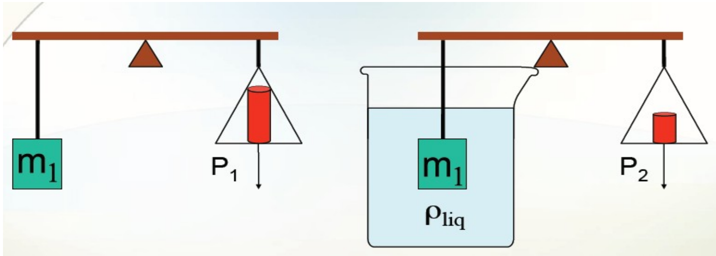
Calculons le volume de glace fondu en eau:

$$M = \rho_{glace}\, V_{glace} = \rho_{eau}\, V_{eau}$$

$\leftrightarrow \quad V_{eau} = \dfrac{\rho_{glace}}{\rho_{eau}}\, V_{glace} = V_{immergé}$ le niveau de la mer ne montera pas !

Mesure de la masse volumique:

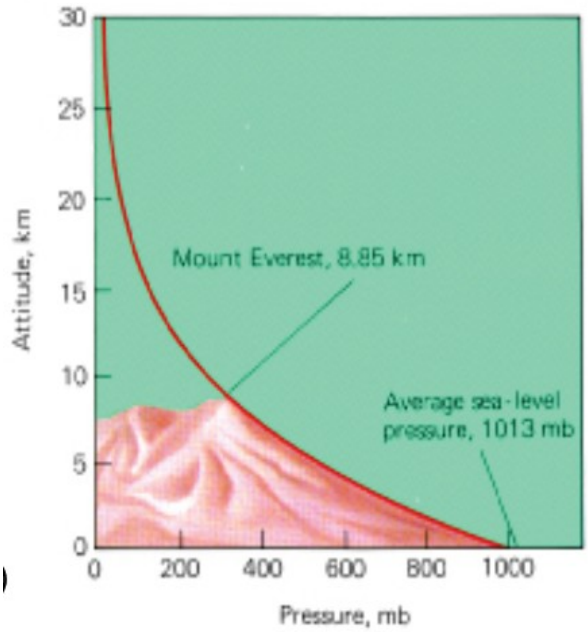
$$P_1 = m_1 g = \rho_1 V_1 g$$



$$P_2 = m_1 g - \rho_{liq} V_1 g = \rho_1 V_1 g - \rho_{liq} V_1 g = (\rho_1 - \rho_{liq}) V_1 g$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{P_1} = \frac{\rho_{liq}}{\rho_1} \quad \rightarrow \quad \rho_1 = \frac{P_1}{(P_1 - P_2)} \rho_{liq}$$

7. Loi barométrique



On considère maintenant un gaz qui est un fluide compressible (ρ ne peut plus être considérée comme une constante mais dépend de la pression). On peut assimiler ce gaz à un gaz parfait.

$$PV = nRT \quad \rightarrow \quad P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV} = \rho \frac{RT}{M}$$

$$\leftrightarrow \quad \rho = \frac{PM}{RT}$$

D'après la loi fondamentale de l'hydrostatique des fluides, on peut écrire:

$$dP + \rho g dz = 0$$

$$\leftrightarrow \quad dP = \frac{-Mg}{RT} P\, dz \quad \leftrightarrow \quad \frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{RT} dz$$

en intégrant entre P_1 et P_2 et entre z_1 et z_2 ⟶ $\int (\frac{dP}{P}) = \int (\frac{-Mg}{RT} dz)$

Conditions initiales:

$P_1 = P_{sol}$ $\quad z_1 = 0$
$P_2 = P(z)$ $\quad z_2 = z$

$$\ln(\frac{P_z}{P_{sol}}) = \frac{-Mg}{RT} z \quad \rightarrow \quad \ln(P(z)) = \frac{-Mg}{RT} z + \ln(P_{sol})$$

$$P(z) = P_{sol} \exp(\frac{-Mgz}{RT})$$

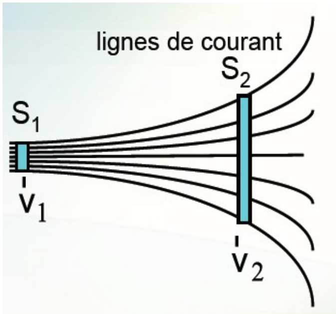
La pression diminue avec l'altitude!

III. Dynamique des fluides en mouvement

1. Écoulement laminaire

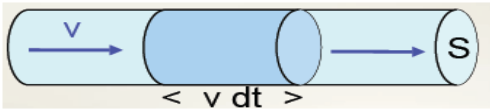
Régime laminaire: la vitesse du fluide de ces écoulements est définie en chaque point et a une variation régulière de proche en proche.

2. Écoulement parfait



On assimile un fluide parfait à un liquide incompressible (ρ = cste).
Cet écoulement se fait sans perte d'énergie (on néglige les frottements).
On définit les termes :

- ligne de courant: trajectoire suivie par un volume infinitésimal dV dans l'écoulement
- tube de courant : ensemble de lignes adjacentes s'appuyant sur une courbe fermée

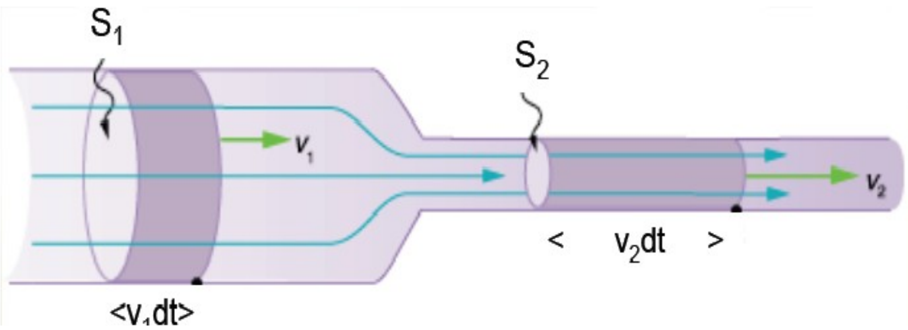


Conservation du débit le long d'un tube de courant:

Volume dV traverse S pendant dt $dV = S\,v\,dt$

On en déduit le débit: $Q = \frac{dV}{dt} = S\,v$

«Tout le liquide qui entre dans le tube par la section d'entrée en sort par la section de sortie»
Il y a donc conservation du débit le long d'un tube de courant.

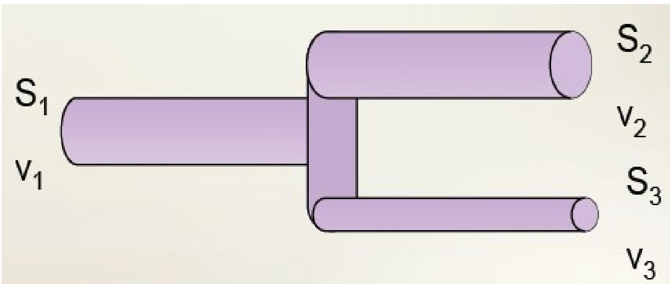


$dV_1 = S_1 v_1 dt = Q_1 dt = dV_2 = Q_2 dt \rightarrow Q_1 = Q_2$ et $S_1 v_1 = S_2 v_2$

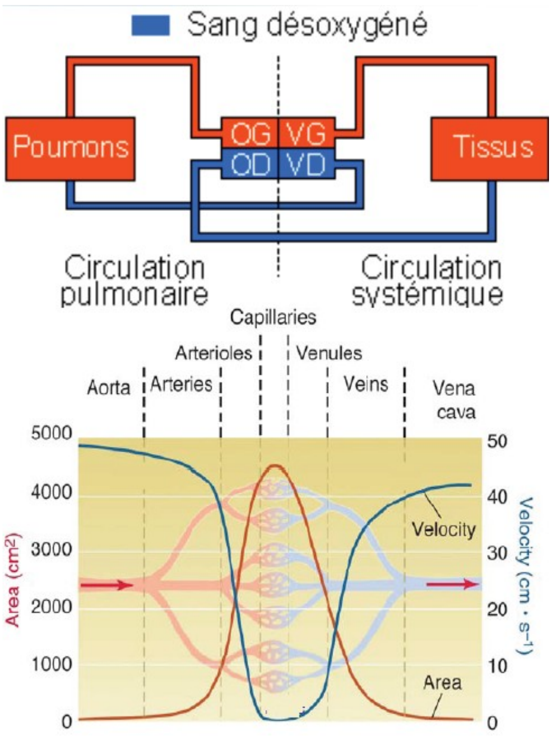
Il existe une analogie avec la loi des nœuds en électricité : la somme des débits qui arrivent est égale à la somme des courants qui partent...

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 + S_3 v_3$$



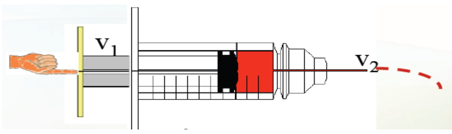
3. Circulation sanguine



<u>Volumes:</u>
- total: 5L dont 55% de plasma
- artères : 15% (réservoir de pression)
- veines: 64% (réservoir de volume)
- capillaires: 5% (zone d'échanges)
- poumons + cœur : 16%

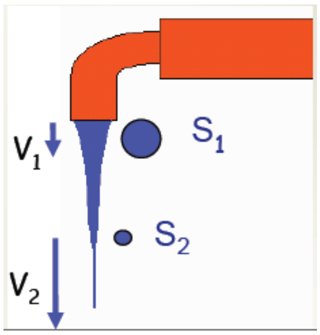
<u>Débit constant:</u>
- 5-6L.min^{-1}

4. Différentes applications :



A quelle vitesse relative sort le liquide de l'aiguille de la seringue, sachant que les sections de l'aiguille et du corps de la seringue valent s = 0,01 cm² et S = 1 cm² ?

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \frac{1}{0{,}01} v_1 = 100\, v_1$$



Pourquoi le filet d'eau du robinet rétrécit-il ?

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Comme la vitesse augmente en descendant (principe de la chute libre), la surface au contraire diminue.

5. Loi de Bernoulli (1738) *et pas Bernouilli !!! M. Bernoulli n'était pas une nouille!*

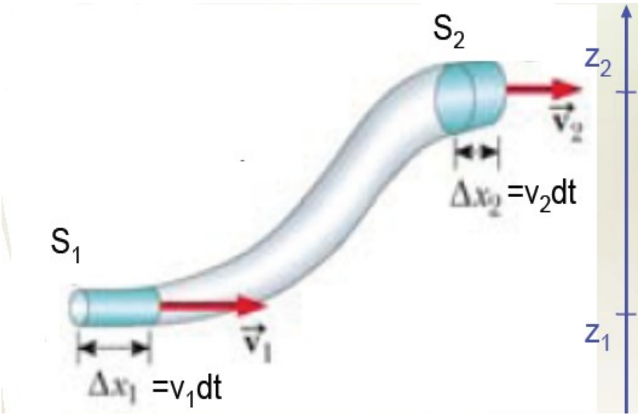
Le fluide étant incompressible, on observe en plus d'une conservation du débit, une conservation de la masse.
On peut donc écrire:

$$dm_1 = \rho S_1 v_1 dt = dm_2 \rho S_2 v_2 dt$$

La masse de fluide entrant dans la tube de courant est égale à la masse de fluide sortant du tube de courant !

On calcule la variation d'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie du tube de courant:

$$dEc=\frac{1}{2}dm(v_2^2-v_1^2)$$



Les forces s'exerçant sur le fluide sont les forces de pression et la force de pesanteur.

Calcul des travaux des forces:

$\delta W_{P1}=P_1S_1dx_1=P_1S_1v_1dt>0$ (travail moteur)

$\delta W_{P2}=-P_2S_2dx_2=-P_2S_2v_2dt<0$ (travail résistant)

$\delta W_g=dmg(z_1-z_2)<0$

On considère l'écoulement comme parfait, on néglige donc les pertes d'énergie. Il y a donc conservation de l'énergie cintétique le long du tube de courant.

D'après <u>le théorème de l'énergie cinétique</u>, on a :

$$dEc=\sum\delta W_i$$

$$dEc=\delta W_{P1}+\delta W_{P2}+\delta W_g$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{1}{2}dm(v_2^2-v_1^2)=P_1S_1v_1dt-P_2S_2v_2dt+dmg(z_1-z_2)$$

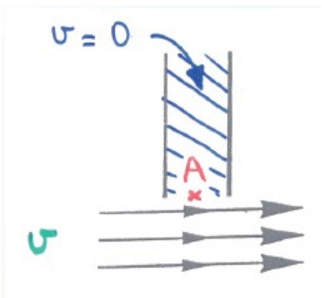
On multiplie par ρ de chaque côté de l'équation :

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2-\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_1-P_2+\rho gz_1-\rho gz_2$$

$$\leftrightarrow \quad P_2+\rho gz_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2=P_1+\rho gz_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2$$

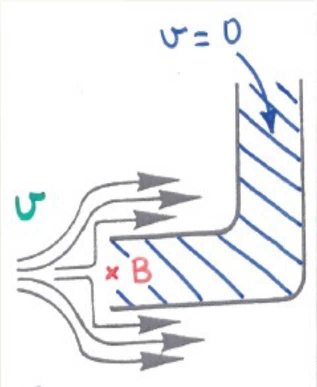
6. Cas des obstacles à l'écoulement:

- <u>Obstacle tangent à l'écoulement du fluide :</u>



$v(A)\sim v$

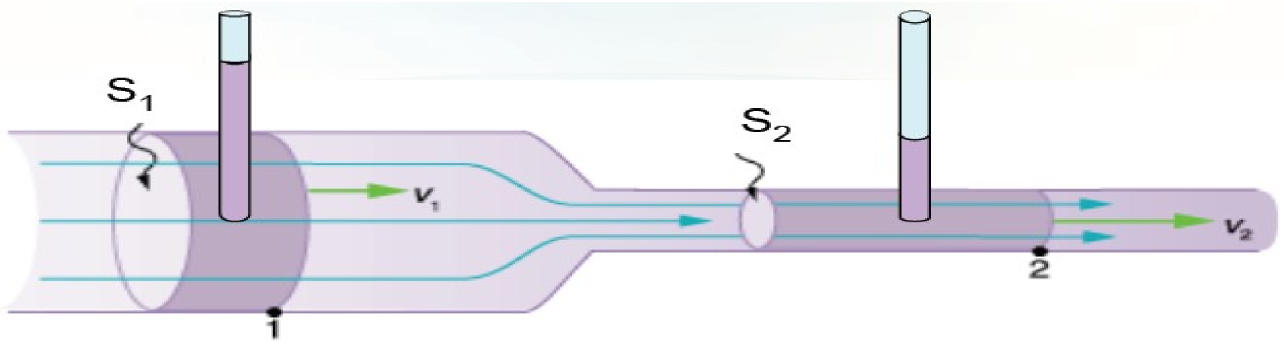
- <u>Obstacle frontal par rapport à l'écoulement du fluide:</u>



$V(B) \sim 0$

7. Effet Venturi

<u>principe</u>: lorsque la vitesse augmente, la pression diminue.



A altitude constante z le long d'une ligne de courant, on peut écrire:

$P+\frac{1}{2}\rho v^2=cste$ dans notre exemple, $S_1>S_2$ donc $v_1<v_2$ $\rightarrow$ $P_1>P_2$

Combien valent les différences de pression et de hauteur dans les petits tubes de mesures ?

$S_1 v_1=S_2 v_2$ De plus comme $S_1>S_2$ donc $v_1<v_2$

Ici $z_1=z_2$, le théorème de Bernoulli donne donc : $P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$

$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)>0$$

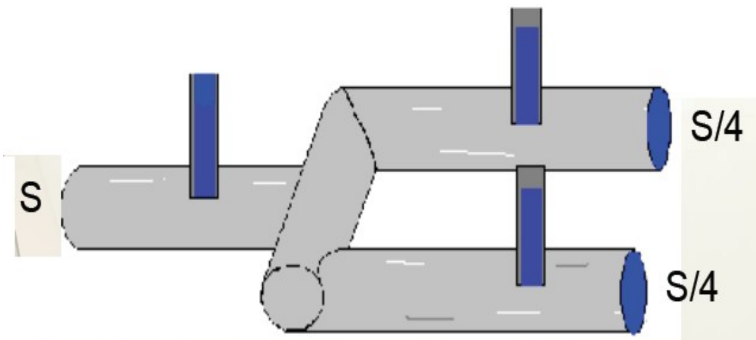
Grâce à la loi de l'hydrostatique, dans les petits tubes on peut écrire:

$P_1=P_{atm}+\rho g h_1$ $P_2=P_{atm}+\rho g h_2$

$$\rightarrow \quad P_1-P_2=\rho g(h_1-h_2)=\frac{1}{2}\rho v_1^2(\frac{S_1^2}{S_2^2}-1)$$

Autre exemple:

$Sv=\frac{2\times S}{4}v'$ $\rightarrow$ $v'=2v$

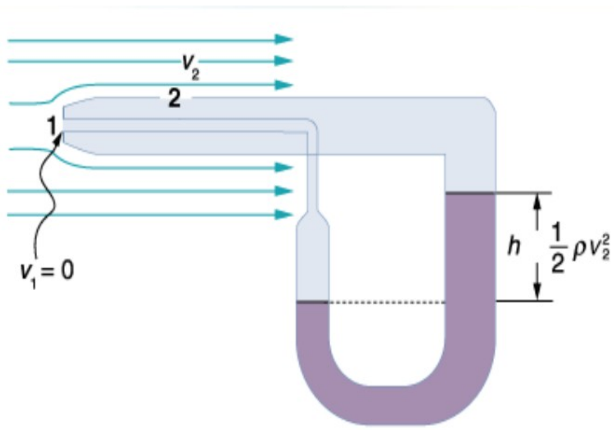


$$P+\frac{1}{2}\rho v^2=P'+2\rho v^2 \quad \rightarrow \quad P'=P-\frac{3}{2}\rho v^2$$

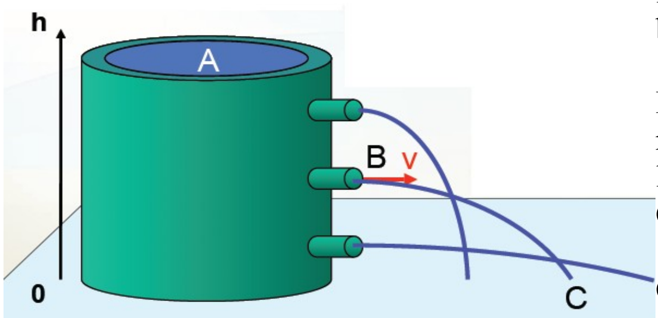
8. Tube de Pitot

$v_1 = 0$
v_2 = vitesse de l'écoulement > 0

→ $P_2 < P1$



9. Vase de Toricelli



Exercice type très fréquent en mécanique des fluides, on peut adapter ce cas aux fontaines, barrages et autres jets d'eau.

Le récipient A est de grande dimension par rapport à l'ouverture en B, on peut donc négliger la vitesse en A par rapport à la vitesse en B.
On écrit donc : $v_A \sim 0$

On applique le théorème de Bernoulli entre les points A et B:

$$P(A)+\rho g h_A=P(B)+\rho g h_B+\frac{1}{2}\rho v^2$$

avec P(A) = P(B) = Patm

d'où: $\rho g h_A=\rho g h_B+\frac{1}{2}\rho v^2 \quad \leftrightarrow \quad \rho g(h_A-h_B)=\frac{1}{2}\rho v^2=\rho g \Delta h$

→ $v=\sqrt{(2g\Delta h)}$

Il existe de nombreuses autres application du théorème de Bernoulli que vous découvrirez au fur et à mesure des exercices.

10. Théorème de Bernoulli modifié:

- <u>Puissance fournie par une pompe à un liquide:</u>

$$P=(P_1-P_2)Q=|\Delta P|\times Q$$

- <u>Loi de Bernoulli modifiée :</u>

$$P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g z_2=\Delta P+P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g z_1$$

Ce document, ainsi que tous les cours de P1, sont disponibles gratuitement sur <u>http://coursp1bichat-larib.weebly.com/index.html</u>