<u>Cours N°2</u> : <u>Probabilités conditionnelles, indépendances, somme et expérience de variables aléatoires discrètes</u>.

I. <u>Probabilités conditionnelles</u>

A. <u>Définition</u>

On appelle **<u>probabilité conditionnelle de A sachant (si) B</u>** (avec P(B) > 0)

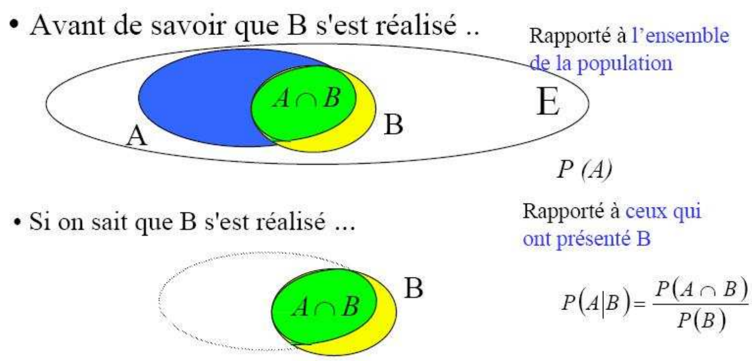
$$\boxed{\boldsymbol{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}}$$

P(A/B) peut s'écrie aussi $\mathbf{P_B(A)}$.

<u>Attention</u> : la loi conditionnelle est une loi de probabilité, **elle vérifie notamment les axiomes de calcul des probabilités** !

- P(A/B) est t**oujours compris entre 0 et 1**.
- $\boxed{\boldsymbol{P(\bar{A}/B)=1-P(A/B)}}$

[Le sachant B, ou si B, signifie que l'on sait que B est obligatoirement réalisé (ou on le considère). En reprenant la formule générale d'une probabilité $P(A)=\dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles en tout}}$ *, on a le nombre de cas possibles réduit au nombre de cas qui réalisent B.]*



Il est possible de réaliser un petit tableau bien pratique lors de l'étude de deux événements vis-à-vis de l'indépendance ou pas. Soit A et B deux événements distincts :

	A	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
B	$P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$ $P(A\cap B)=P(B/A)\times P(A)$	$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A}/B)\times P(B)$ $P(\bar{A}\cap B)=P(B/\bar{A})\times P(\bar{A})$	**P(B)**
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$P(A\cap\bar{B})=P(A/\bar{B})\times P(\bar{B})$ $P(A\cap\bar{B})=P(\bar{B}/A)\times P(A)$	$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{B}/\bar{A})\times P(\bar{A})$ $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{B}/\bar{A})\times P(\bar{A})$	$\boldsymbol{P(\bar{B})}$
	P(A)	$\boldsymbol{P(\bar{A})}$	

[Vous avez sur le tableau toutes les informations à mettre. C'est un tableau assez « long » à faire mais il se révèle très efficace quand par exemple le problème qui est à résoudre donnera plusieurs questions, avec une étude globale des données. En gros, faites le quand vous voyez que le problème est assez long, et qu'il y a plusieurs questions.
Vous voyez bien ce que vous avez, ce que vous n'avez pas et comment l'avoir rapidement.
En faisant P(A) x P(B) et en le comparant à P(A ∩ B), vous voyez si les événements sont indépendants. Si c'est le cas, P(A) x P(B) et P(A ∩ B) sont équivalents. Vous pouvez faire la même chose avec les autres cases.]

B. Application en médecine

1. Sensibilité

La **sensibilité** d'un signe pour une maladie M est la **proportion de malades** (donc **sachant** que la maladie **M** est présente) **parmi ceux qui ont le signe**. On peut la noter de la façon suivante :

$$\boxed{Se = P(S/M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)}}$$

Donc, pour calculer une sensibilité en étudiant un groupe de personnes, on fait le rapport des personnes qui sont malades et qui présentent le signe sur le total des malades.

$$\boxed{Se = \frac{\text{nombre de personnes malades et présentant l'unique signe}}{\text{nombre de malades au total}}}$$

2. Spécificité

• La **spécificité** d'un signe pour une maladie M est la proportion de **non malades** (donc **sachant** que le sujet est **sain**) **parmi ceux qui n'ont pas le signe**. On peut la noter de la façon suivante :

$$\boxed{Sp = P(\bar{S}/\bar{M}) = \frac{P(\bar{S} \cap \bar{M})}{P(\bar{S})}}$$

Donc, pour calculer une spécificité en étudiant un groupe de personnes, on fait le rapport des personnes qui ne sont pas malades et qui n'ont pas le signe sur le total des personnes non malades.

$$\boxed{Sp = \frac{\text{nombre de personnes non-malades et ne présentant pas l'unique signe}}{\text{nombre de non-malades au total}}}$$

Attention **: si P(M) change, la sensibilité et la spécificité ne changent pas !** *[voir ses tableaux]*

3. Valeur prédictive positive (VPP)

La **valeur prédictive positive** correspond à la **proportion de malades parmi ceux qui présentent un signe donné**. Elle est notée :

$$\boxed{VPP = P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)}}$$

Elle est utilisée par le médecin pour trouver un **diagnostique juste**. Si la VPP est très grande, dès que le sujet présentera le signe donné, le médecin sera directement orienté vers la bonne maladie. Donc pour calculer une VPP, en étudiant un groupe de personnes, on fait le rapport des personnes qui sont malades et qui ont le signe sur le nombre de personnes ayant le signe.

$$\boxed{VPP = \frac{\text{nombre de personnes malades et présentant l'unique signe}}{\text{nombre de personnes ayant l'unique signe au total}}}$$

4. Valeur prédictive négative

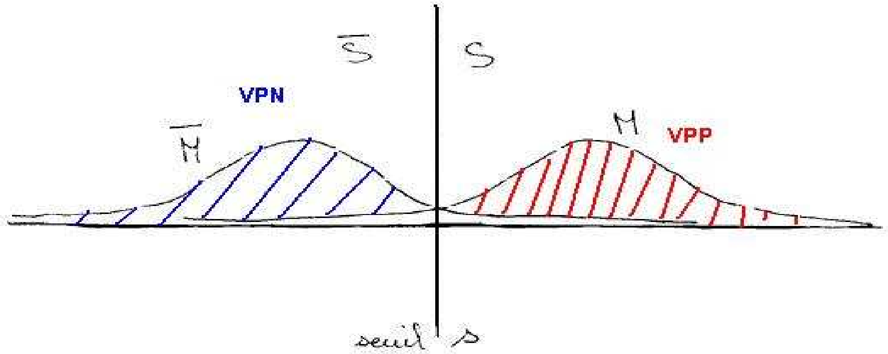
La **valeur prédictive négative** correspond à la **proportion de malades parmi ceux qui ne présentent pas le signe donné**. Elle est notée :

$$\boxed{VPN = P(\bar{M}/\bar{S}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})}}$$

Donc pour calculer une VPN, en étudiant un groupe de personnes, on fait le rapport des personnes qui ne sont pas malades et qui n'ont pas le signe sur le nombre de personnes n'ayant pas le signe.

$$\boxed{VPN = \frac{\text{nombre de personnes non-malades et ne présentant pas l'unique signe}}{\text{nombre de personnes ne présentant pas l'unique signe au total}}}$$

Cas d'un test quantitatif : c'est un test où l'on considèrera le patient comme présentant le signe s'il a une donnée inférieure ou supérieure à un certain **seuil** déterminé. Par exemple, une personne qui a une glycémie à jeun de plus de 1,20g présente le signe diabète. Cela ne veut pas dire qu'il est forcément diabétique, mais il en a de grandes chances...
Pour ce genre de test, le schéma ci-dessous peut être utile :



A droite du seuil *[le gros trait vertical noir]*, les personnes présentent le signe, A gauche, elles ne le présentent pas. Les deux courbes représentent des probabilités. Il est donc peu probable d'être malade quand on ne présente pas le signe *[ce qui est plutôt rassurant]*. Utilisez ce schéma pour faire le changement de seuil *[ça tombe souvent]*.

Si on **augmente le seuil**, on voit de suite que la **VPP diminue** et que la **VPN augmente**. On remarque aussi que la probabilité de présenter le signe diminue et donc la probabilité présenter le signe et être malade diminue. Comme la probabilité d'être malade ne change pas (la courbe de M reste inchangée quel que soit le seuil), on comprend bien que la **sensibilité diminue** également.

C. Corollaires

D'après la relation $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, on définit la probabilité de l'événement A ET B :

$$\boxed{\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=P(B/A)\times P(A)}}$$

1. Formule des probabilités totales

Tout d'abord, on peut toujours décomposer A selon la survenue ou non de B :

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$$

On en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{P(A)}=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=\boldsymbol{P(A/B)\times P(B)+P(A/\bar{B})\times P(\bar{B})}}$$

Se trouve en gras la **formule des probabilités totales**. Cette formule se généralise à toute partition (Bi) (l'événement en lui-même et son contraire [par exemple, comme ci-dessus, avec B et $\bar{B}$].) :

$$\boxed{\boldsymbol{P(A)=\sum P(A\cap Bi)=\sum P(A/Bi)\times P(Bi)}}$$

2. Théorème de BAYES

Le **théorème de Bayes** est intéressant pour la VPP, il est donné par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{P(A/B)=\frac{P(B/A)\times P(A)}{P(B/A)\times P(A)+P(B/\bar{A})\times P(\bar{A})}}}$$

[Pour arriver à cette formule là, c'est pas bien compliqué. On part de la formule de base de la probabilité conditionnelle $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

On remplace ensuite le numérateur par le tout premier corollaire débouchant de la formule de la probabilité conditionnelle $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=P(B/A)\times P(A)$

Enfin, on remplace le dénominateur par la formule des probabilités totales

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})=P(A/B)\times P(B)+P(A/\bar{B})\times P(\bar{B})$ *{ça marche pareil avec P(B)}*

Et on obtient bien ce qui est proposé par Bayes...]

Il ne faut pas confondre probabilité conditionnelle et probabilité d'une intersection !

- La **probabilité conditionnelle** est une proportion de sujets présentant A **parmi** les sujets qui ont présenté B.
- La **probabilité d'une intersection** est une proportion de TOUS les sujets qui ont présenté A **ET** B.

II. Indépendance en probabilité

L'**indépendance** signifie que la connaissance de **réalisation** (ou la réalisation tout simplement) **d'un événement donné ne modifie en rien la probabilité de survenue d'un autre événement**.

$$\boxed{P(A)=P(A/B)=P(A/\bar{B})}$$

Dans le cas contraire, A et B ne sont pas indépendants.

Deux événements A et B sont indépendants en probabilité **si et seulement si** :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

En effet, $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=P(B/A)\times P(A)$

Si A et B sont indépendants :

$P(A\cap B)=P(B/A)\times P(A)=P(A)\times P(B)$

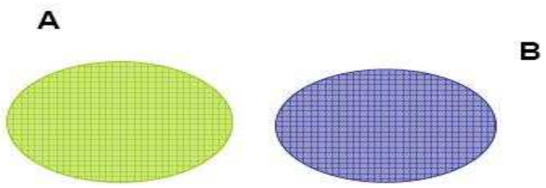
$P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=P(B)\times P(A)$

A et B sont indépendants si A et $\bar{B}$ sont indépendants.
A et B sont indépendants si $\bar{A}$ et B sont indépendants.
A et B sont indépendants si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Si A et B ne sont **pas indépendants**, on dit qu'ils sont **liés** ou **associés**.

Il ne faut pas confondre événements incompatibles et événements indépendants !

- Les **événements incompatibles** (ou exclusifs) ne font pas intervenir leur probabilité. **Ils ne peuvent se réaliser en même temps**.



Ils sont caractérisés par la relation :

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

- Les **événements indépendants** sont liés à leur probabilité. Les deux peuvent se produire même temps mais **la réalisation d'un événement n'a aucune incidence sur la réalisation du second événement**. Pour rappel, ils sont caractérisés par la relation :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

De plus, **deux événements incompatibles ne sont, en règle, pas indépendants**. En effet, si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B)=0$. Pour regarder s'ils sont indépendants, il faut vérifier que $P(A \cap B)=P(A) \times P(B)$

Donc, A et B incompatibles ne pourront être indépendants que si P(A) = 0 ou P(B) = 0 (ou les deux).

III. Variables aléatoires discrètes indépendantes

A. Loi de probabilité conjointe

Soit X et Y, deux variables aléatoires discrètes quelconques. On définit la **loi de probabilité conjointe de X et Y** par :

$$\boxed{P(X=x ; Y=y)}$$

Ce qui revient à donner la probabilité que X = x **ET** Y = y pour tout couple (x ; y) *[on sous entend une intersection]* . Cette loi conjointe de X et Y est souvent **tabulée**.

	X=X1	X=x2	...	X=xi
Y=y1	P(X=x1,Y=y1)	P(X=x2,Y=y1)		P(X=xi,Y=y1)
Y=y2	P(X=x1,Y=y2)	P(X=x2,Y=y2)		P(X=xi,Y=y2)
...				
Y=yj	P(X=x1,Y=yj)	P(X=x2,Y=yj)		P(X=xi,Y=yj)

La somme des colonnes de la 1ère ligne donne P(Y=y1)

La somme des lignes de la 1ère colonne donne P(X=x1)

La loi de X et la loi de Y sont donc obtenues par **sommation des marges** *[une marge étant un des rectangles de la tabulation]* : on dit que ce sont les **lois marginales**.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors pour tout couple (x ; y), **la loi conjointe est le produit des lois marginales**.

	X=X1	X=x2	...	X=xi
Y=y1	P(X=x1,Y=y1)	P(X=x2,Y=y1)		P(X=xi,Y=y1)
Y=y2	P(X=x1,Y=y2)	P(X=x2,Y=y2)		P(X=xi,Y=y2)
...				
Y=yj	P(X=x1,Y=yj)	P(X=x2,Y=yj)		P(X=xi,Y=yj)

P(Y=yj)

P(X=xi)

$$\boxed{P(X=xi ; Y=yj)=P(X=xi) \times P(Y=yj)}$$

B. Espérance d’une somme de variables aléatoires

Soient X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires quelconques. On a :

$$\boxed{E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)}$$

L’espérance d’une somme de variables aléatoires est toujours égale à la somme des espérances.

Plus généralement, **si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers**, on a, pour a et b réels :

$$E(aX)=aE(X)$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

C. Variance d’une somme de variables aléatoires

Soient X_1, X_2, …, X_n des variables aléatoires indépendantes. On a :

$$\boxed{Var(X_1+X_2+\ldots+X_n)=Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(X_n)}$$

La variance d’une somme de variables aléatoires est égale à la somme des variances uniquement si les variables sont indépendantes.

Plus généralement, Si a et b sont réels, on a :

$$Var(aX)=a^2\,Var(X)$$

$$Var(aX+b)=a^2\,Var(X)$$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes :

$$Var(aX+bY)=a^2\,Var(X)+b^2\,Var(Y)$$

IV. Exemples de variables aléatoires discrètes

A. Loi Binomiale

Pour rappel, la loi de **Bernoulli**, de paramètre p, est une expérience avec seulement **deux issues possibles**, 0 et 1, en considérant que 1 est le succès et que 0 est l'échec. On note
P(X = 1 = succès) = p.

La **loi Binomiale**, de paramètres **(n ; p)**, est une **répétition de n expériences de Bernoulli**. On pose **X variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus** au bout des n expériences $(X\in\mathbb{N})$. En utilisant les mêmes notations, la loi Binomiale est alors caractérisée par la relation :

$$\boxed{P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=C_n^x\,p^x(1-p)^{n-x}}$$

[Attention à la notation de la prof ! Les deux sont valables.]

L'**<u>espérance</u>** et la **<u>variance</u>** d'une **loi Binomiale** sont :

- $\boxed{E(X)=n\times p}$
- $\boxed{Var(X)=n\times p\times(1-p)}$

La loi Binomiale **modélise le nombre de succès parmi n épreuves <u>indépendantes</u>** (un peu comme un pile ou face).

*[Allez **page 7** du formulaire. Pour calculer une probabilité, , commencez d'abord par prendre votre bon paramètre p, probabilité de succès. Ensuite, cherchez le bon paramètre n. Enfin, terminez par choisir le nombre de succès et lisez dans le tableau la valeur correspondante à la probabilité d'avoir ce nombre de succès, compte tenu des paramètres.]*

B. Loi de Poisson

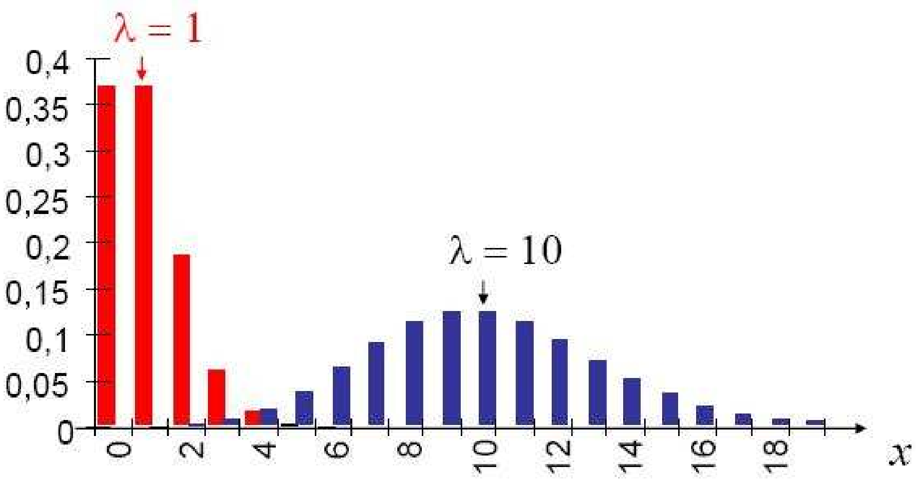
La loi de Poisson est une **<u>variable aléatoire discrète</u>** de **paramètre <u>λ</u>**, qui est **supérieur à 0**. Elle est donnée par la relation :

$$\boxed{P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}}$$

L'**<u>espérance</u>** et la **<u>variance</u>** de la **loi de Poisson** sont :

- $\boxed{E(X)=\lambda}$
- $\boxed{Var(X)=\lambda}$

La loi de Poisson modélise le nombre de succès (événements) dans le cas où ces événements sont indépendants et de faible probabilité. On l'appelle aussi la « <u>loi des événements rares</u> ».



Quand λ augmente : la position centrale de la distribution se déplace vers la droite en s'étalant de plus en plus

La loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$ est aussi une **approximation de la loi Bin(n,p)**. Elle est valide dès que **n est « grand » et que p est « petit »** (p << 1).
[Quand p est négligeable, comme c'est le cas ici, $n \times p$ *et* $n \times p \times (1 - p)$ *sont équivalents, ce qui explique que l'****espérance et la variance*** *d'une loi de Poisson soient* ***la même****.]*
[La principale utilité de la loi de Poisson est d'approximer la loi Binomiale, car une loi de Poisson est plus simple à utiliser qu'une loi Binomiale...]

La **somme** de n variables aléatoires de Poisson **<u>indépendantes</u>** de paramètre respectif λ_i
(avec i = 1, …, n) **suit une loi de Poisson de paramètre $\Sigma\ \lambda_i$.**

[Pour calculer une probabilité issue d'une loi de Poisson. Aller page 3.
Choisir son bon paramètre λ. Puis enfin chercher sa valeur de x ou de k que l'on cherche, et lire la valeur dans le tableau...]