Cours N°4 : La loi Normale

I. Définition

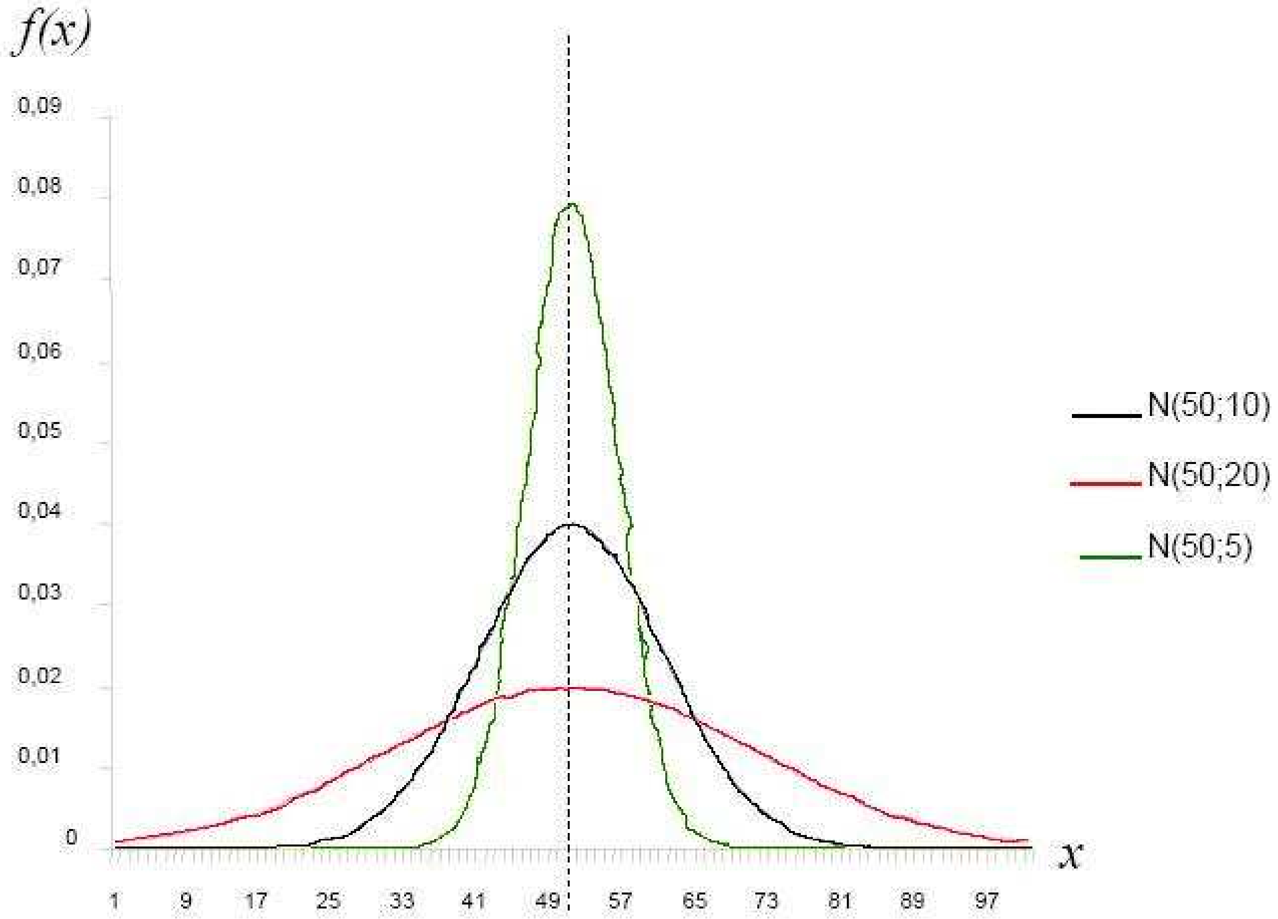
La **loi normale**, ou **loi de Laplace-Gauss**, ou **loi de Gauss**, de paramètre **σ** et **µ**,est définie sur $\mathbb{R}$ par la densité de probabilité suivante :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Avec :

- **f(x)** > **0** et $\int_{x\in E} f(x)\,dx=1$
- **µ** est l'**espérance** de X.
- **σ** est l'**écart-type** de X.
- **σ²** est la **variance** de X.

Lorsque X suit une loi normale de paramètre σ et µ, notée X ~ N (µ ;σ²), la densité de probabilité décrit une **courbe symétrique autour de son espérance µ**. On dit que c'est une courbe **« en cloche »**.



II. Fonction de répartition

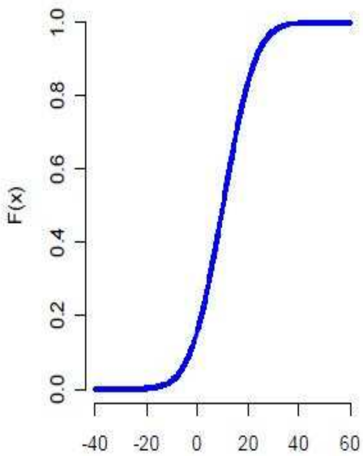
La **fonction de répartition** est toujours définie par la même formule :

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = P(X \leqslant x)} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

En intégrant la densité de probabilité de la loi normale, on peut définir plus précisément F(x) :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{t} . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt$$

La fonction de répartition d'une loi normale est également **continue** et **croissante de 0 à 1**.



Cependant, son calcul nécessite une intégration compliquée. Pour le simplifier, on **« standardise » X**, par l'intermédiaire d'un **changement d'échelle**, afin d'obtenir une **variable sans unité**.

III. Standardisation de X

La **standardisation de X** s'effectue en 2 étapes :

- On **« centre » X**, en lui **soustrayant son espérance**. On obtient ainsi **X – E(X)** ou **X – µ**.
- On **« réduit » X – µ** *[ce qui revient à réduire X puisque Var(X + b) = Var(X)]*, en **divisant par son écart-type σ**.

On obtient ainsi une **nouvelle loi standardisée** que l'on nomme **Z**, définie par :

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

Z est aussi une loi normale car « **toute combinaison linéaire de variables aléatoires normales est une variable normale**. »

On peut calculer l'**<u>espérance de Z</u>** :

$E(\frac{X-\mu}{\sigma})=E(\frac{1}{\sigma}X-\frac{\mu}{\sigma})$ et on a toujours $E(aX+b)=aE(X)+b$

D'où $E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{\mu}{\sigma}=\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}=\mathbf{0}$

Puisque l'**espérance est nulle**, on dit que **<u>Z est « centrée »</u>**.

On peut également calculer la **<u>variance de Z</u>** :

$Var(\frac{X-\mu}{\sigma})=Var(\frac{1}{\sigma}X-\frac{\mu}{\sigma})$ et $Var(aX+b)=a^2\,Var(X)$

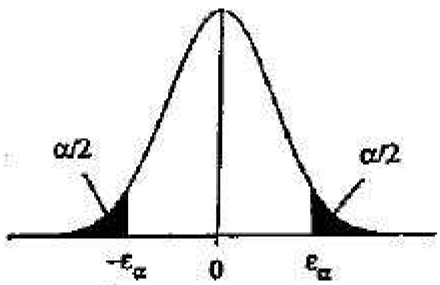
D'où $Var(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma^2}Var(X)=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=\mathbf{1}$

Puisque la variance est égale à 1, on dit que **<u>Z est « réduite »</u>**.

Pour résumer, si X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ ² **[X ~ N(μ ; σ ²)]**, alors Z, donné par la relation $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, suit une loi normale d'**espérance 0** et de **variance** (et d'écart-type) **1** [**X ~ N(0 ; 1)]**.
On parle de **<u>loi normale standard</u>** ou de **<u>loi normale centrée réduite</u>**.

IV. <u>Calculs de probabilités</u>

[Ouvrir son formulaire à la page 4 et la lire]



- Si on cherche à calculer une probabilité telle que $P(X\leqslant x)$; on a :

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(X-\mu\leqslant x-\mu)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$.=\boldsymbol{P(Z\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma})}$$

Notre valeur de $\frac{x-\mu}{\sigma}$ est ε_α : on cherche donc, dans le tableau, la valeur ε_α **la plus proche** de $\frac{x-\mu}{\sigma}$ puis on lit ensuite la **valeur α correspondante** (avec les dixièmes d'α dans la colonne de gauche et les centièmes d'α dans la ligne du haut [α étant une probabilité, elle ne dépasse pas 1]).

- Si $\varepsilon_\alpha \leqslant 0$; on prend la **valeur positive** d' ε_α *[grâce à la symétrie de la courbe de Gauss]*, et on lit la **valeur d'α correspondante** *[dans le tableau]*. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $\frac{\alpha}{2}$

- Si $\varepsilon_\alpha \geqslant 0$; on prend la valeur d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $1-\frac{\alpha}{2}$

- Si $\varepsilon_\alpha = 0$, la probabilité que l'on cherche est **0,5**.

- **Si on cherche à calculer une probabilité telle que $P(X \geqslant x)$; on a :**

$$1-F_X(x)=P(X \geqslant x)=P(X-\mu \geqslant x-\mu)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$.=P\left(Z \geqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Si $\varepsilon_\alpha \leqslant 0$; on prend la **valeur positive** d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $1-\frac{\alpha}{2}$

- Si $\varepsilon_\alpha \geqslant 0$; on prend la valeur d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $\frac{\alpha}{2}$

- Si $\varepsilon_\alpha = 0$, la probabilité que l'on cherche est **0,5**.

- **Si on cherche à calculer une probabilité telle que $P(X \leqslant |x|)$; on a :**

$$P(X \leqslant |x|)=P(X-\mu \leqslant |x-\mu|)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\right)$$
$$.=P\left(Z \leqslant \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\right)$$

- Si $\varepsilon_\alpha \leqslant 0$; on prend la **valeur positive** d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $1-\alpha$

- Si $\varepsilon_\alpha \geqslant 0$; on prend la valeur d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $1-\alpha$

- Si on cherche à calculer une probabilité telle que $P(X \geqslant |x|)$; on a :

$$P(X \geqslant |x|) = P(X-\mu \geqslant |x-\mu|) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \geqslant \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|)$$
$$.= \boldsymbol{P(Z \geqslant \left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|)}$$

• Si $\varepsilon_\alpha \leqslant 0$; on prend la **valeur positive** d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur α

• Si $\varepsilon_\alpha \geqslant 0$; on prend la valeur d' ε_α et on lit la **valeur d'α correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur α

Utilisation de la table statistiques 2b *[page 5 du formulaire]*

Cette table est super pratique **si les deux conditions suivantes sont réunies** :

- Votre ε_α , que l'on appelera ici x_β , est **plus ou moins rond** (ou du moins multiple de 0,05).
- Vous cherchez une probabilité telle que $P(X \leqslant x)$ ou $P(X \geqslant x)$

- Si on cherche à calculer une probabilité telle que $P(X \leqslant x)$; on a :

• Si $x_\beta \leqslant 0$; on prend la **valeur positive** de x_β et on lit la **valeur de β correspondant**e. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur β

• Si $x_\beta \geqslant 0$; on prend la valeur de x_β et on lit la **valeur de β correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $1-\beta$

- **Si on cherche à calculer une probabilité telle que $P(X \geqslant x)$; on a :**

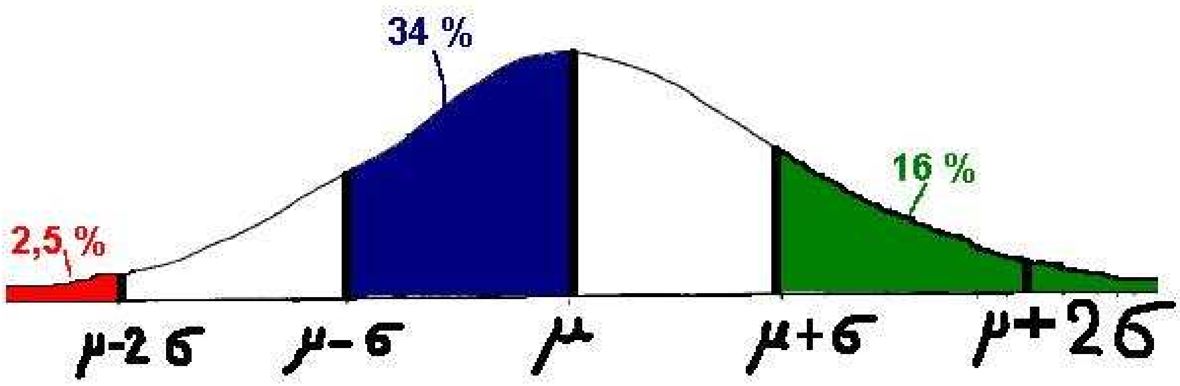
• Si $x_\beta \leqslant 0$; on prend la **valeur positive** de x_β et on lit la **valeur de β correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur $1-\beta$

• Si $x_\beta \geqslant 0$; on prend la valeur de x_β et on lit la **valeur de β correspondante**. La probabilité que l'on cherche correspond à la valeur β

<u>Remarque</u> : P(X = x) = 0 !

Toutes ces probabilités s'expliquent en regardant et en se plaçant sur les schémas, à condition de se rappeler que l'aire sous la courbe fait 1.

Un petit schéma qui va grandement vous faciliter les calculs.



Ainsi, on a :

- $P(Z \leqslant \mu - 2\sigma) = 0{,}025$
- $P(Z \leqslant \mu - \sigma) = 0{,}16$
- $P(Z \leqslant \mu) = 0{,}5$
- $P(Z \geqslant \mu) = 0{,}5$
- $P(Z \geqslant \mu + \sigma) = 0{,}16$
- etc...

On peut en déduire d'autres probabilités simples à calculer :

- $P(Z \leqslant |\mu - \sigma|) = 0{,}68$
- $P(Z \geqslant |\mu - 2\sigma|) = 0{,}05$
- $P(Z \geqslant \mu - \sigma) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$
- etc...

V. Intérêts de la loi Normale

On utilise la loi normale pour des raisons :

- **Mathématiques**. La loi normale est entièrement déterminée par deux paramètres (μ ; σ²)
- **Statistiques**. De nombreuses statistiques de test suivent la loi Normale.
- **Les sommes de variables aléatoires indépendantes de même loi quelconque suivent la loi Normale** par l'intermédiaire du **Théorème Central Limite** (TLC) *[que vous verrez au cours suivant]*.

VI. Quelques approximations par une loi Normale

A. Approximation d'une loi Binomiale par une loi Normale

Si $np \geqslant 5$ **ET** $n(1-p) \geqslant 5$ alors **la loi Binomiale de paramètres (n ; p) peut être approchée par la loi Normale** :

- De **moyenne** $\mu = np$
- De **variance** $\sigma^2 = np(1-p)$
- D'**écart-type** $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

B. Approximation d'une loi de Poisson par une loi Normale

De même, **si λ est suffisament grand** (généralement supérieur à 5), **la loi de Poisson de paramètre λ peut être approchée par une loi Normale** :

- De **moyenne λ**
- De **variance λ**
- D'**écart-type** $\sqrt{\lambda}$