Cours N°8 : Tests de comparaison portant sur un échantillon.

[Dans ce cours, je ne traite pas les nombreux exemples utilisés par la prof pour vous faire comprendre les buts des tests en vous donnant des cas concrets. ALLEZ EN COURS, c'est important pour vous !]

I. Test pour une proportion

A. Hypothèses

On réalise un **test de comparaison d'une proportion observée** (d'un échantillon) **à une proportion théorique** (une population).
Pour cela, on s'intéresse à une **variable X** qui suit une **loi de Bernoulli**. On observe sur un échantillon, une **proportion p de x = 1** (succès).
X suit une loi de Bernoulli de paramètre π.

On a donc comme hypothèses :

- $\mathbf{H_0 : \pi = \pi_0}$
- $\mathbf{H_1 : \pi \neq \pi_0}$

Attention : les hypothèses reposent toujours sur des valeurs théoriques.

B. Construction d'un test

On répète la variable X plusieurs fois en constituant un groupe de n personnes.

On vérifie tout d'abord les **conditions de validité**. Il faut que :

- $n\pi_0 \geqslant 5$
- $n(1-\pi_0) \geqslant 5$

Sous H_0, $\pi = \pi_0$, donc P ~ $N\left(\pi_0 ; \frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}\right)$

$Z = \dfrac{P-\pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$ ~ N(0 ; 1) (car P suit une loi normale)

On forme donc la quantité :

$$\boxed{z = \dfrac{p-\pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}}$$

La **zone de rejet de H_0** est toujours la même, lorsque $|z| > 1{,}96$

II. Test pour une moyenne sur un grand échantillon

A. Hypothèses

On réalise un **test de comparaison d'une moyenne observée** (d'un échantillon) **à une moyenne théorique** (une population).
On s'intéresse pour cela à une **variable X continue**. On observe, à partir d'un échantillon de n valeurs de x_i, une **moyenne expérimentale m**.
X a une moyenne théorique μ = E(X).

On a donc pour hypothèses :

- **$H_0 : \mu = \mu_0$**
- **$H_1 : \mu \neq \mu_0$**

On travaille sur de **grands échantillons**, où $n \geqslant 30$

B. Construction du test

On vérifie tout d'abord les **conditions de validité**. Il suffit juste que $n \geqslant 30$.

Sous H_0 : $\mu = \mu_0$
M ~ $N\left(\mu_0 ; \frac{\sigma^2}{n}\right)$. On estime σ^2 par s^2.

Donc $Z = \frac{M - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ ~ **N(0 ; 1)** (car M suit une loi normale)

On forme donc la quantité :

$$\boxed{z = \frac{m - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}}$$

La **zone de rejet de H_0** est toujours la même, lorsque $|z| > 1{,}96$

C. Puissance du test

Pour **calculer la puissance** d'un test d'une **comparaison d'une moyenne expérimentale à une moyenne théorique**, il faut tout d'abord **spécifier une hypothèse alternative particulière**.
On pose : $\mathbf{H_1 : \mu = \mu_1 = x}$

Pour calculer la puissance, on s'appuie sur la formule suivante :

$$\boxed{P(\text{rejet } H_0 / H_1 \text{ vraie}) = P(|Z'| > 1{,}96 / \mu = \mu_1 = x)}$$

avec $Z' = \dfrac{M - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}}$

Sous H_1, M ~ $N\left(\mu_1 ; \dfrac{s^2}{n}\right)$

$$E(Z') = \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} E(M - \mu_0) = \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} (\mu_1 - \mu_0) = \frac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} (x - \mu_0)$$

$$Var(Z') = \frac{1}{\frac{s^2}{n}} Var(M - \mu_0) = \frac{\frac{s^2}{n}}{\frac{s^2}{n}} = 1$$

Donc **Z' ~ N** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}(x - \mu_0) ; 1\right)$

Attention : ici, **Z' n'est plus centrée !**

$$P(|Z'| > 1{,}96 / \mu = \mu_1 = x) = p_1 + p_2$$
$$p_1 = P(Z' < 1{,}96 / \mu = \mu_1 = x)$$
$$p_2 = P(Z' > 1{,}96 / \mu = \mu_1 = x)$$

Très souvent dans le calcul de puissance, **on néglige une des deux probabilités**, et on en calcule qu'une seule.

Pour **augmenter la puissance**, on peut :

- **Augmenter la taille de l'échantillon**.
- **Changer H_1**.