Chapitre 1 Système d'unités, dimensions homogénéité

Avertissement: *J'ai choisi pour plus de clarté et une meilleure compréhension de la physique qui est une matière assez vaste de découper en plusieurs chapitres les cours de mécanique. En effet les diapositives du professeur contiennent de nombreux points qu'il convient de maîtriser en vue d'une réussite optimale le jour du concours. J'ai choisi également de ne pas retranscrire dans leur intégralité et dans leur forme les diapositives du cours mais plutôt de fabriquer mon cours personnel, ceci pour deux raisons:*

- *les diapositives ne sont pas toujours très claires pour des étudiants peu habitués à faire de la physique et il manque les explications indispensables délivrées par le professeur le jour du cours magistral*
- *je pense qu'il peut être très utile de pouvoir comparer deux supports ou deux manières d'expliquer pour comprendre la physique.*

Ce premier chapitre peut sembler à première vue simpliste et pas vraiment indispensable alors qu'en réalité il est primordial. En effet, c'est l'équation aux dimensions qui vous permettra de vérifier si vos résultats sont cohérents ; un résultat homogène n'est pas forcément juste (le problème des constantes) mais un résultat non homogène est forcément faux et permet de déceler l'erreur avant de se lancer dans l'application numérique. L'équation aux dimensions vous permet également de retrouver l'unité du résultat quand celle-ci est un peu exotique (cela permet également de ne pas apprendre toutes les unités par cœur au risque de les confondre, et en médecine on a suffisamment à apprendre par cœur donc si on peut gagner un peu de place dans sa mémoire ce n'est pas plus mal).

1. Système d'unités

a- Mesure d'une grandeur

En physique on mesure différents types de grandeur (masse, longueur, vitesse, durée, pression, courant électrique...).
On caractérise une mesure de manière absolue en fixant une grandeur étalon qui sert d'unité.
Petit exemple pour illustrer: vous écrivez sur une feuille à carreaux, on choisit arbitrairement que la grandeur étalon sera le carreau, si vous voulez mesurer la longueur du trait qui souligne votre titre, vous vous servez du carreau comme référence: 4 unités = 4 carreaux.
Lors de l'application numérique il est primordial de préciser l'unité utilisée (du fait de son choix arbitraire).

b- Choix des unités – Intérêt d'un système d'unités

Historiquement on a choisit les unités des différents types de grandeur indépendamment les unes des autres.
La longueur qui correspond à une quantité d'espace s'exprime en mètres (m).
La durée qui correspond à une quantité de temps s'exprime en secondes (s).
La masse qui correspond à une quantité de matière s'exprime en kilogrammes (kg).

▲Attention:▲ici la notion quantité de matière ne correspond pas au nombre de moles que vous utiliserez fréquemment en chimie.

Le problème rencontré avec le choix indépendant des différentes unités est qu'il complique l'expression des lois physiques.

Prenons l'exemple de l'expression de l'unité d'une force. D'après la seconde loi de Newton (PFD ou RFD pour les intimes)

$F = m \times a$

m est la masse en kg.

a est l'accélération en $m.s^{-2}$

F devrait donc s'exprimer en $kg.m.s^{-2}$, ce qui est un peu lourd... on utilise donc le Newton (N).

On travaille donc avec un système d'unités. On choisit les grandeurs dites fondamentales. Toutes les grandeurs fondamentales doivent être reliées entre elles par des lois physiques. On choisit les unités des grandeurs fondamentales pour une définition la plus précise possible.

Il existe d'autres types de grandeur qui sont les grandeurs dérivées. On choisit leurs unités en utilisant des coefficients numériques pratiques pour les lois physiques.

Les unités des grandeurs dérivées dépendent des unités des grandeurs fondamentales.

Reprenons notre exemple:

Si on choisissait m et a comme grandeurs fondamentales avec comme unités le kg et le $m.s^{-2}$ alors F devient une grandeur dérivée.

Avec la loi physique : $F = \alpha \times m \times a$

On choisit l'unité de F : pour simplifier on prend $\alpha = 1$.

L'unité de F est le $kg.m.s^{-2}$ appelé le Newton (N).

Remarque: la notion de grandeur dérivée n' a strictement rien à voir avec le sens mathématique du terme «dérivée» qui sera utilisé un peu plus loin dans le cours.

c- Système international (SI)

C'est le système utilisé en France.

Grandeur fondamentale	Unité associée
Longueur	Mètre (m)
Masse	Kilogramme (kg)
Temps	Seconde (s)
Température	Kelvin (K)
Quantité de matière	Mole (mol)

d- Grandeurs dérivées

Les unités des grandeurs dérivées pour le SI seront précisées dans les autres chapitres. Elles ont souvent des noms particuliers pour simplifier (mais s'expriment néanmoins toujours en fonction des unités des grandeurs fondamentales).

Lorsqu'on réalise l'application numérique d'une loi physique il faut TOUJOURS exprimer toutes les grandeurs de l'équation dans les unités SI.

Exemple: loi des gaz parfait (loi fondamentale en physique par ailleurs)

$PV = nRT$

P est la pression exprimée en Pascal (Pa).

V est le volume exprimé en m3.

n est la quantité de matière exprimée en mol.

R est une constante appelée constante des gaz parfaits.

T est la température exprimée en K.

2. Dimension d'une grandeur

La dimension d'une grandeur X, notée [X] est la loi de puissance reliant X aux grandeurs fondamentales.
La dimension est caractéristique d'un type de grandeur (par exemple les différentes énergies possèdent une même dimension).
La dimension d'une grandeur est indépendante du choix des unités.

Grandeurs fondamentales:

[longueur] = [L]
[masse] = [M]
[temps] = [T]
[température] = [θ]

Exemples de grandeurs dérivées rencontrées fréquemment:

[vitesse] = $[L][T]^{-1}$
[accélération] = $[L][T]^{-2}$
[force] = $[M][L][T]^{-2}$
[énergie] = $[M][L]^2[T]^{-2}$
[angle] = [1] (sans dimension)

Ainsi pour trouver la dimension d'une grandeur il suffit de connaître une loi physique reliant cette grandeur à des grandeurs de dimension connue.

3. Homogénéité et résultat

Remarque: *ce paragraphe me semble être le plus utile en vue du concours. Si vous comprenez parfaitement ce qui va suivre et que vous arrivez à l'utiliser efficacement et rapidement, ceci vous permettra de gagner du temps mais surtout des points en repérant rapidement si votre résultat est faux ou vraisemblable.*

- Dans une égalité (ou une inégalité d'ailleurs) les 2 membres de l'équation ont forcément la même dimension.
- Les différents termes d'une somme doivent avoir la même dimension.
- Dans les fonctions exp(x), ln(x), cos(x), sin(x), tan(x), x doit être sans dimension.
- Il en découle que la dimension des fonctions précédentes (exp(x), ...) est 1.

Si ces conditions ne sont pas respectées, le résultat est **NON HOMOGENE** (NH pour les intimes) et donc forcément **FAUX**.
Sachez qu'un résultat non homogène ne vous rapportera **JAMAIS** de points mais pire que cela, généralement les résultats non homogènes sont considérés comme absurdes et peuvent vous enlevez des points (et oui les correcteurs sont redoutables...). C'est pourquoi il faut **TOUJOURS** vérifier l'homogénéité de son résultat.

Si le résultat est homogène, ça ne veut pas dire qu'il soit forcément juste mais il est physiquement cohérent et on ne pourra donc pas vous enlever de points.

Exemples:

Volume d'un cône:

A $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ B $V=\pi h^2 r$ C $V=\frac{(\pi h^2)}{r}$

[V] = [L]3
[A] = [L]²[L] = [L]3 → homogène
[B] = [L]²[L] = [L]3 → homogène
[C] = [L]²[L]-1 = [L] → non homogène

Remarque: ce n'est pas parce que les deux premières formules sont homogènes à un volume qu'elles sont toutes les deux exactes.

Conseils pour vérifier l'homogénéité:

- Vérifier le résultat
- Chercher la dimension manquante
- Remonter le calcul ligne à ligne
- Faire les calculs en littéral jusqu'au bout puis après avoir vérifié l'homogénéité faire l'application numérique (ceci évite de devoir faire le calcul 2 fois si on s'aperçoit que notre résultat n'était pas homogène)

Exercices d'application:

Conseil: *les exercices de ce premier chapitre ne tomberont jamais tels quels au concours. Ils sont là pour vous entraîner à vérifier rapidement l'homogénéité de vos résultats (pour que ça devienne un réflexe). Je vous conseille d'en faire quelques uns pour voir si vous arrivez à le faire efficacement et rapidement mais de ne pas faire la page d'exercices entière si vous vous apercevez que vous maîtrisez rapidement le sujet. Dans le cas contraire, il faut faire le plus d'exercices possibles jusqu'à ce qu'ils soient tous réussis. Bon courage!*

Exercice 1 : Dimensions

Donner les dimensions des grandeurs suivantes en fonction des grandeurs fondamentales du SI.

- Puissance P (on a $P=\frac{dE}{dt}$ où E est une énergie).
- Constante de gravitation G, sachant que la force d'interaction entre deux masses m, m' distantes de r vaut : $f=G\frac{(mm')}{r^2}$
- Pression p homogène à une force sur une surface
- Constante R intervenant dans la loi des gaz parfaits pV = nRT, où p est la pression, V le volume, n le nombre de moles et T la température.
- Constante de Boltzmann k sachant qu'on la trouve souvent en physique dans des termes du type $\exp(\frac{-(mgz)}{(kT)})$, où m est une masse, g le champ de pesanteur, z une altitude et T la température.

Exercice 2 : Homogénéité

Dire lesquelles de ces formules sont homogènes.

- l longueur, g champ de pesanteur, T temps:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T=\frac{1}{(2\pi)}\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{(l+g)}{lg}}$$

- p quantité de mouvement (masse multipliée par vitesse), m masse, c vitesse de la lumière, E énergie:

$$E=\sqrt{pc^2+m^2c^4} \qquad E^2-\frac{p^2c^2}{m}=m^4 \qquad E^2=p^2c^2+m^2c^4$$

- m masse, a longueur, RN force, k constante de raideur d'un ressort, θ angle, t temps, g champ de pesanteur:

$$-ma\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-R_N-mg\sin(\theta)-ka\cos^2(\theta) \qquad -a\left(\frac{d\theta}{(dt)}\right)^2=R_N-g\sin(\theta)-ka\cos^2(\theta)$$

$$-ma\frac{(d^2\theta)}{(dt^2)}=-R_N-mg\sin(\theta)-ka\cos^2(\theta) \qquad -ma\left(\frac{(d\theta)}{(dt)}\right)^2=-R_N-mg\sin(\theta)-ka\cos(\theta)$$

Correction:

Exercice 1:

- $P=\frac{dE}{dt} \rightarrow [P]=\frac{([M][L]^2[T]^{-2})}{[T]} \rightarrow [P]=[M][L]^2[T]^{-3}$

- $f=G\frac{(mm')}{r^2} \rightarrow G=\frac{(fr^2)}{(mm')}$

$$[G]=\frac{([M][L]^3[T]^{-2})}{[M]}{}_2 \rightarrow [G]=[L]^3[M]^{-1}[T]^{-2}$$

- $p=\frac{F}{S} \quad [p]=[M][L]^{-1}[T]^{-2}$

- pV = nRT → $R=\frac{(pV)}{(nT)}$

$$[R]=\frac{([M][L]^2[T]^{-2})}{([N][\theta])}=[M][L]^2[T]^{-2}[N]^{-1}[\theta]^{-1}$$

- $[\exp(\frac{-(mgz)}{(kT)})]=[1]$ $\rightarrow$ $\frac{([M][L]^2[T]^{-2})}{([k][\theta])}=[1]$ $\rightarrow$ $[k]=[M][L]^2[T]^{-2}[\theta]^{-1}$

Exercice 2:

- $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\rightarrow$ $\sqrt{\frac{([L])}{([L][T]^{-2})}}=\frac{1}{\sqrt{[T]^{-2}}}=\sqrt{[T]^2}=[T]$ HOMOGENE

- $T=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$ $\rightarrow$ $\sqrt{\frac{([L][T]^{-2})}{[L]}}=\sqrt{[T]^{-2}}=[T]^{-1}$ NON HOMOGENE

- $T=\frac{1}{(2\pi)}\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\rightarrow$ $[\frac{1}{(2\pi)}]=[1]$ et $[\sqrt{\frac{l}{g}}]=[T]$ HOMOGENE

- $T=2\pi\sqrt{\frac{(l+g)}{lg}}$ $\rightarrow$ NON HOMOGENE car les termes d'une somme doivent être homogènes or l et g n'ont pas même dimension.

- $E=\sqrt{pc^2+m^2c^4}$ $\rightarrow$ $[pc^2] = [M][L]^3[T]^{-3}$ et $[m^2c^4] = [L]^4[T]^{-4}[M]^2$ NON HOMOGENE car les termes de la somme ne sont pas homogènes

- $E^2-\frac{p^2c^2}{m}=m^4$

  $[E]^2=[M]^2[L]^4[T]^{-4}$ et $[\frac{(p^2c^2)}{m}]=\frac{([M]^2[L]^4[T]^{-4})}{[M]}=[M][L]^4[T]^{-4}$ NON HOMOGENE car les termes de la différence ne sont pas homogènes.

- $E^2=p^2c^2+m^2c^4$

  $[p^2c^2]=[M]^2[L]^4[T]^{-4}$; $[m^2c^4]=[M]^2[L]^4[T]^{-4}$; $[E^2]=[M]^2[L^4][T^{-4}]$

  HOMOGENE

- $-ma(\frac{d\theta}{dt})^2=-R_N-mgsin(\theta)-ka\,cos^2(\theta)$

  $[-R_N]=[M][L][T]^{-2}$
  $[mgsin(\theta)]=[M][L][T]^{-2}[1]=[M][L][T]^{-2}$
  $[kacos^2(\theta)]=[M][T]^{-2}[L]$
  $[-ma(\frac{(d\theta)}{(dt)})^2]=[M][L]\frac{[1]}{[T]^2}=[M][L][T]^{-2}$
  HOMOGENE

- $-a(\frac{(d\theta)}{(dt)})^2 = R_N - g\sin(\theta) - ka\,cos^2(\theta)$
  $[-R_N] = [M][L][T]^{-2}$
  $[gsin(\theta)] = [L][T]^{-2}$ → NON HOMOGENE

- $-ma\frac{(d^2\theta)}{(dt^2)} = -R_N - mgsin(\theta) - kacos^2(\theta)$ → HOMOGENE (justifications réalisées dans les calculs précédents)

- $-ma(\frac{(d\theta)}{(dt)})^2 = -R_N - mgsin(\theta) - kacos(\theta)$ → HOMOGENE (idem)

Chapitre 2 Cinématique
Système de coordonnées

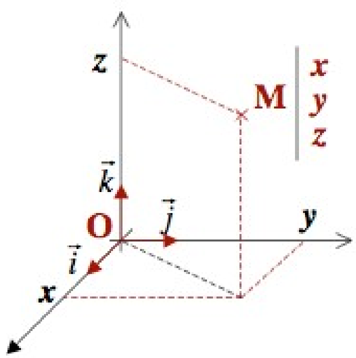
Introduction: ce chapitre traitera essentiellement de la mécanique newtonienne du point matériel. La cinématique est l'étude et la description des mouvements indépendamment des causes qui les produisent (trajectoire, vitesse, accélération, changement de référentiel).
Il existe différents systèmes de coordonnées adaptées à différentes symétrie.

1. Les coordonnées cartésiennes

C'est une base orthonormée directe c'est-à-dire qu'elle est constituée par 3 vecteurs, perpendiculaires deux à deux, unitaires.
Base cartésienne directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; O étant appelé l'origine du repère.

$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

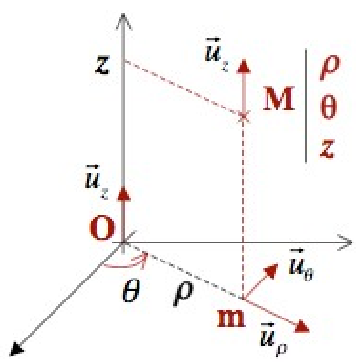
(x,y,z) sont les coordonnées cartésiennes de M.



Cette base est la même pour tous les points de l'espace.

2. Les coordonnées cylindriques

La base cylindrique est constituée de 3 vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. C'est une base orthonormée directe.



L'angle $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est appelé angle polaire et on a $r = \|\vec{Om}\|$.
H est le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) et m est le projeté orthogonal de M sur (xOy).
$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{OH} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$

$$\vec{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

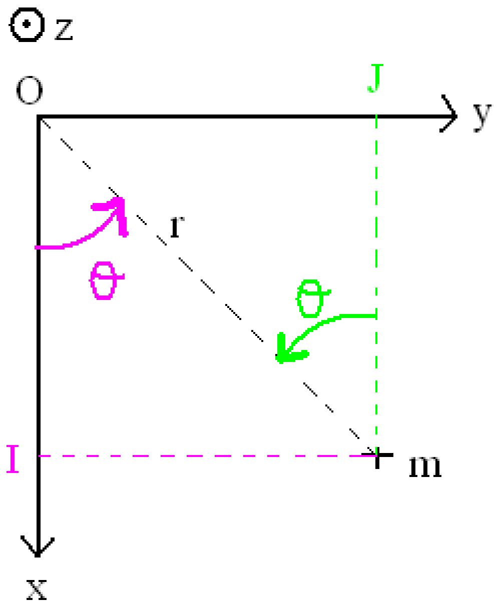
Remarque: l'expression de $\vec{OM}$ ne comporte pas de composante sur $\vec{e}_\theta$, il ne faut donc jamais écrire $\vec{OM}=r\,\vec{e}_r+\theta\,\vec{e}_\theta+z\,\vec{e}_z$

Cette base est mobile et bouge avec le point M, elle est très utile dans les problèmes à symétrie cylindrique.

Il arrive de travailler uniquement dans le plan, dans ce cas, on n'utilise pas le vecteur $\vec{e}_z$; on parle alors de base polaire. D' où $\vec{OM}=r\,\vec{e}_r$.

<u>Lien des coordonnées cylindriques avec les coordonnées cartésiennes :</u>

On se place dans le plan (xOy).



z (cartésien) = z (cylindrique) = z

Dans (OIm) on a : $\cos(\theta)=\frac{OI}{Om}=\frac{x}{r}$ (On applique simplement la trigonométrie à un triangle rectangle).

On a donc : $\boxed{x=r\cos(\theta)}$

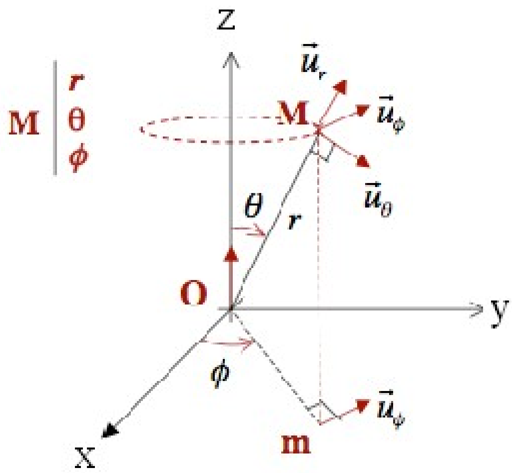
De même dans (OJm) on a : $\sin(\theta)=\frac{OJ}{Om}=\frac{y}{r}$

On a donc : $\boxed{y=r\sin(\theta)}$

3. Les coordonnées sphériques

Remarque: les coordonnées sphériques sont beaucoup moins utilisées que les coordonnées cartésiennes et cylindriques car leur utilisation est beaucoup plus délicate.

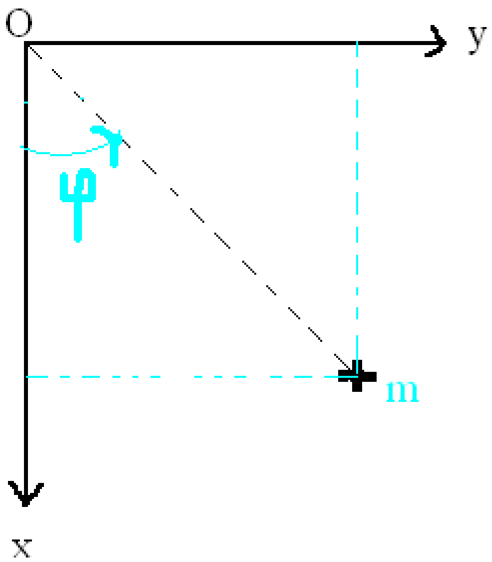
La base sphérique est constituée de 3 vecteurs $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\phi)$. C'est une base orthonormée directe.



$$\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{u}_r}$$

z = r cos(θ)
Om = r sin(θ)

<u>Expression des coordonnées cartésiennes en fonctions des coordonnées sphériques:</u>



(remarque: je ne détaille pas ici l'application de la trigonométrie, si vous avez compris pour les coordonnées cylindriques, il suffit de transposer le même raisonnement pour les coordonnées sphériques).

x = Om cos(φ) = r sin(θ)cos(φ)
y = Om sin(φ) = r sin(θ)sin(φ)

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

Chapitre 3 Cinématique du point

Introduction: *Avant de parler de trajectoire, de vitesse et d'accélération d'un point matériel, je pense qu'il est indispensable de rappeler que ces paramètres sont valables pour un référentiel donné et changent selon le référentiel utilisé. Dans ce cours je n'aborderai pas la mécanique du solide car on assimilera toujours un solide à un point (en l'occurrence son centre d'inertie).*

Petit rappel de ce qu'il faut toujours faire en physique (au début sur un brouillon, après quelques exercices on peut le faire uniquement dans sa tête).

A. Définir le système étudié:

On doit savoir de quoi on parle, quel est l'objet dont on va étudié le mouvement.
Par exemple : on étudiera le système «montgolfière» assimilé à son centre d'inertie G.

B. Définir le référentiel (le fameux référentiel!!!!).

Le référentiel c'est le lieu d'où on observe le système étudié.
Par exemple: je suis sur Terre et j'observe la montgolfière dans les airs ; j'étudie donc le système «montgolfière» dans le référentiel terrestre (c'est-à-dire lié à la Terre) considéré comme étant galiléen.

Rappel : vous ne vous souvenez plus ce qu'est un référentiel galiléen? Deux solutions, ressortez un bouquin de physique de TS ou lisez ce rappel fait pour vous.

Référentiel galiléen: un **référentiel galiléen**, ou **inertiel**, est un référentiel dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est soit immobile, soit en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel. Cela signifie que le principe d'inertie, qui est énoncé dans la première loi de Newton, s'y applique. (On reverra donc la notion de référentiel galiléen dans le chapitre traitant de la dynamique du point matériel).
Selon les cas on pourra considérer comme galiléen les référentiels suivants:

- **Le référentiel de Copernic** $\Re_C$ ou référentiel héliocentrique:

origine: le centre de gravité du système solaire (qui correspond quasiment au centre du Soleil)
trois axes: trois étoiles «fixes» très éloignées.

- **Le référentiel géocentrique** $\Re_G$:

origine: le centre de la Terre
trois axes : identiques aux trois axes de $\Re_C$.

- **Le référentiel terrestre** $\Re_T$, lié à la surface de la Terre (appelé aussi référentiel du laboratoire).

Ces 3 référentiels sont dans l'ordre suivant: $\Re_C$, $\Re_G$ et $\Re_T$ «de moins en moins galiléen».

NB: en P1 on utilisera dans la plupart des cas le référentiel terrestre (hormis pour les problèmes traitant de satellites ou de planètes et autres...) qui sera TOUJOURS considéré comme étant GALILEEN (la mécanique newtonienne en référentiel NON galiléen n'étant pas (encore? XD) au programme de P1...).

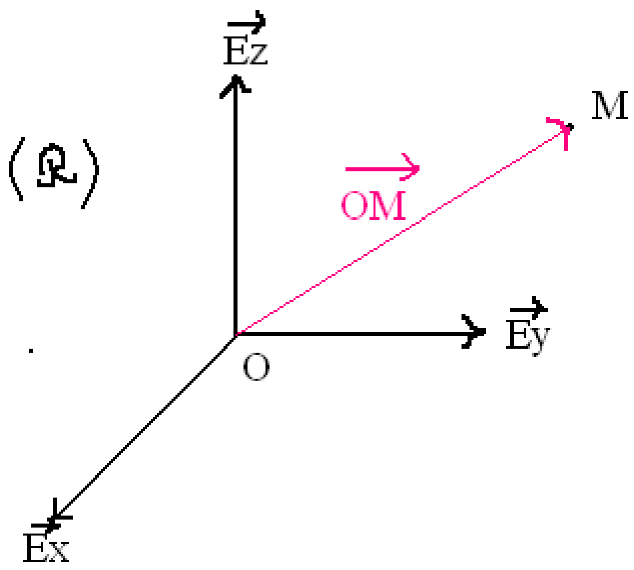
C. Choix d'une base

On définit le référentiel à l'aide d'une base orthonormée directe (cartésienne, cylindrique ou sphérique cf. chapitre2). On choisit la base la plus adaptée au problème à traiter (on cherche les éventuelles symétries cylindriques ou sphériques). On définit alors un repère (il suffit d'ajouter une origine O à la base choisie, le repère est alors lui aussi orthonormé direct).

Une fois ces 3 points remplis, on peut commencer à résoudre un problème de mécanique dans de bonnes conditions et nous allons donc (enfin) commencer le cours qui nous intéresse, à savoir la cinématique.

I. Repérage d'un point

1. Vecteur position



La position du point M dans le référentiel $(\Re)$ est défini à l'aide du vecteur position $\vec{OM}$ composé:
-d'un point origine O fixe dans le référentiel $\Re(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
-du point M observé.

Rappel mathématique: un vecteur est défini par:

- sa direction
- son sens
- sa norme

2. Trajectoire

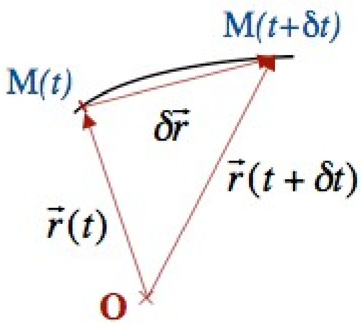
La trajectoire du point M dans le référentiel $(\Re)$ est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps; la trajectoire dépend du choix du référentiel $(\Re)$.

II. Vitesse dans un référentiel $(\Re)$

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel $(\Re)$ est la dérivée temporelle du vecteur position M dans $(\Re)$:

$$\vec{v}(M/\Re)=\frac{(d\vec{OM})}{dt}/\Re$$

$\vec{v}$ s'exprime en $m.s^{-1}$
$\vec{OM}$ s'exprime en m
t s'exprime en s



$\vec{v}(M/\Re)$ est tangent à la trajectoire de M dans $(\Re)$ en chacun des points M dans le sens du mouvement: il correspond à la variation $d\vec{OM}$ du vecteur $\vec{OM}$ pendant l'intervalle de temps δt.

$$\vec{v}\,\delta t=\vec{OM}(t+\delta t)-\vec{OM}(t)$$

Attention: le vecteur vitesse dépend du référentiel choisi!

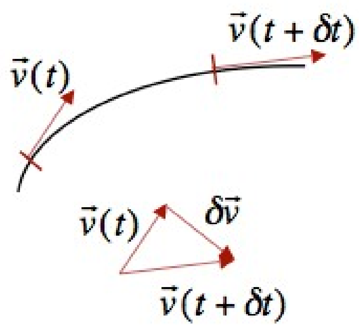
III. Accélération dans un référentiel $(\Re)$

Le vecteur accélération du point M dans le référentiel $(\Re)$ est la dérivée seconde du vecteur position de M par rapport au temps dans le référentiel $(\Re)$:

$$\vec{a}(M/\Re)=\frac{(d^2\vec{OM})}{dt^2}/\Re=\frac{(d\,\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re$$

Le vecteur accélération représente la variation du vecteur vitesse entre les instants t et t + δt divisée par l'intervalle de temps δt :

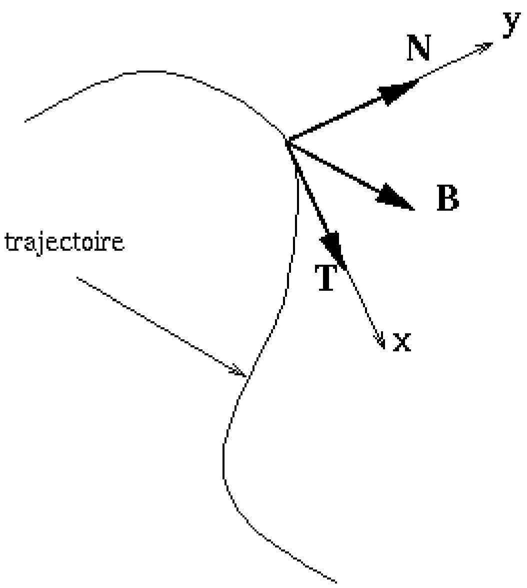
$$\vec{a}(t)/\Re\,\delta t=\vec{v}(t+\delta t)/\Re-\vec{v}(t)/\Re$$



L'accélération représente donc la variation de :

- la norme du vecteur vitesse
- la direction (et du sens) du vecteur vitesse

Cas Particulier: le repère de Frenet



La base de Frenet est composée de deux vecteurs orthogonaux $(\vec{T}\,;\vec{N})$

$\vec{T}$ est tangent à la trajectoire en M, dans le sens du mouvement, unitaire

$\vec{N}$ est orthogonal à la trajectoire en M, dirigé vers la concavité de la trajectoire, unitaire

Dans cette base on a : $\vec{v}(M/\Re)=v\,\vec{T}$ avec $v=\|\vec{v}(M/\Re)\|$

et $\vec{a}(M/\Re)=\frac{(dv)}{dt}\vec{T}+\frac{v^2}{\rho}\vec{N}$ avec ρ rayon de courbure de la trajectoire en M (rayon du meilleur cercle approchant la courbe en M) ρ>0.

Remarque:

Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R, on a : ρ = R
Dans la cas d'un mouvement rectiligne, on a : ρ→ + ∞

On peut donc écrire : $\vec{a}(M/\Re)=\vec{a}_T+\vec{a}_N$ avec $\vec{a}_T=\frac{(dv)}{dt}\vec{T}$ qui est la composante tangentielle à la trajectoire de $\vec{a}$ et $\vec{a}_N=\frac{v^2}{\rho}\vec{N}$ qui est la composante normale de $\vec{a}$ à la trajectoire.

Remarque:

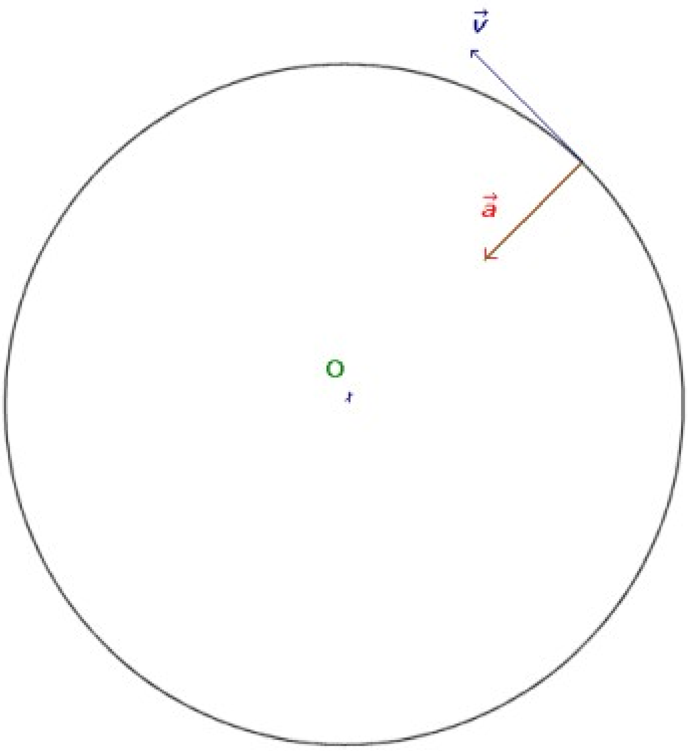
Si $\vec{a}_T$ est dans le sens du mouvement → $\frac{dv}{dt}>0$ → la vitesse augmente avec le temps → le mouvement est **accéléré**.

Si $\vec{a}_T$ est dans le sens contraire du mouvement $\rightarrow \dfrac{dv}{dt}<0$ $\rightarrow$ la vitesse diminue avec le temps $\rightarrow$ le mouvement est **décéléré**

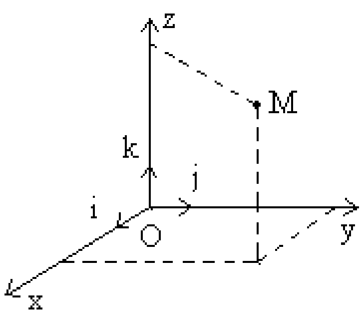
Dans le cas d'un mouvement **UNIFORME**, $\|\vec{v}(M/\Re)\|=cste \leftrightarrow \vec{a}_T=0$

Mais attention, $\vec{a}(M/\Re)=\vec{a}_N=\dfrac{v^2}{\rho}\vec{N}\neq 0$. L'accélération est alors **centripète** (c'est-à-dire dirigée vers le centre de la courbe).

Un mouvement uniforme n'aura une accélération nulle que s'il est **RECTILIGNE**.
Un mouvement circulaire uniforme a une accélération centripète.



IV. Expression de la vitesse et de l'accélération dans la base cartésienne:



Coordonnées cartésiennes

$\vec{OM}=x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y+z\,\vec{e}_z$

Par définition :

$$\vec{v}(M/\Re)=\frac{(d\vec{OM})}{dt}/\Re=\frac{(d(x\vec{e}_x))}{dt}/\Re+\frac{(d(y\vec{e}_y))}{dt}/\Re+\frac{(d(z\vec{e}_z))}{dt}/\Re$$

$\frac{(d(x\vec{e}_x))}{dt}/\Re=\frac{dx}{dt}\vec{e}_x+x\frac{(d\vec{e}_x)}{dt}/\Re$ avec $\frac{(d\vec{e}_x)}{dt}/\Re=\vec{0}$ car $\vec{e}_x$ est fixe dans $(\Re)$.

Notation: $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$

De même $\frac{(d(y\vec{e}_y))}{dt}/\Re=\frac{dy}{dt}\vec{e}_y=\dot{y}\vec{e}_y$ et $\frac{(d(z\vec{e}_z))}{dt}/\Re=\frac{dz}{dt}\vec{e}_z=\dot{z}\vec{e}_z$

$$\vec{v}(M/\Re)=\dot{x}\vec{e}_x+\dot{y}\vec{e}_y+\dot{z}\vec{e}_z$$

Par définition: $\vec{a}(M/\Re)=\frac{(d\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re=\frac{(d(\dot{x}\vec{e}_x+\dot{y}\vec{e}_y+\dot{z}\vec{e}_z))}{dt}/\Re$

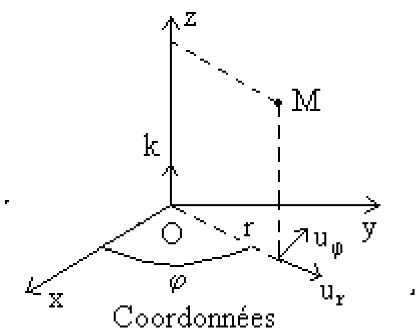
$\frac{(d(\dot{x}\vec{e}_x))}{dt}/\Re=\frac{(d\dot{x})}{dt}\vec{e}_x+\dot{x}\frac{(d\vec{e}_x)}{dt}/\Re$ or $\frac{(d\vec{e}_x)}{dt}/\Re=\vec{0}$ pour les mêmes raisons que précédemment.

Notation: $\frac{(d\dot{x})}{dt}=\frac{(d^2x)}{dt^2}=\ddot{x}$

On effectue le même raisonnement pour y et z et on obtient:

$$\vec{a}(M/\Re)=\ddot{x}\vec{e}_x+\ddot{y}\vec{e}_y+\ddot{z}\vec{e}_z$$

V. Expression de la vitesse et de l'accélération dans la base cylindrique:



Coordonnées cylindriques

$$\vec{OM}=r\vec{e}_r+z\vec{e}_z$$

Par définition, $\vec{v}(M/\Re)=\frac{(d\vec{OM})}{dt}/\Re=\frac{(d\,r\vec{e}_r)}{dt}/\Re+\frac{(d\,z\vec{e}_z)}{dt}/\Re$

$$\frac{(d\,z\,\vec{e}_z)}{dt}/\Re=\frac{dz}{dt}\vec{e}_z+z\frac{(d\,\vec{e}_z)}{dt}/\Re=\dot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\frac{(d\,r\,\vec{e}_r)}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{(d\,\vec{e}_r)}{dt}/\Re=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\frac{(d\,\vec{e}_r)}{dt}/\Re$$

$\frac{(d\,\vec{e}_r)}{dt}\neq\vec{O}$ car $\vec{e}_r$ dépend du temps par l'intermédiaire de θ.

$$\frac{(d\,\vec{e}_r)}{dt}=[\frac{(d\,\theta)}{dt}]\times[\frac{(d\,\vec{e}_r)}{(d\,\theta)}]=\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

D'où $\vec{v}(M/\Re)=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+\dot{z}\,\vec{e}_z$

Par définition, $\vec{a}(M/\Re)=\frac{(d\,\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re=\frac{(d\,(\dot{r}\,\vec{e}_r))}{dt}/\Re+\frac{(d\,(r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta))}{dt}/\Re+\frac{(d\,(\dot{z}\,\vec{e}_z))}{dt}/\Re$

$$\frac{(d\,(\dot{z}\,\vec{e}_z))}{dt}/\Re=\frac{(d\,\dot{z})}{dt}\vec{e}_z+\dot{z}\frac{(d\,\vec{e}_z)}{dt}/\Re=\ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\frac{(d\,(\dot{r}\,\vec{e}_r))}{dt}/\Re=\frac{(d\,\dot{r})}{dt}\vec{e}_r+\dot{r}\frac{(d\,\vec{e}_r)}{dt}/\Re=\ddot{r}\,\vec{e}_r+\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{(d\,(r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta))}{dt}=\frac{(d\,(r\,\dot{\theta}))}{dt}\vec{e}_\theta+r\,\dot{\theta}\frac{(d\,\vec{e}_\theta)}{dt}/\Re$$

$$\frac{(d\,(\dot{r}\,\theta))}{(dt)}=\frac{dr}{dt}\dot{\theta}+r\frac{(d\,\dot{\theta})}{dt}=\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta}$$

$$\frac{(d\,\vec{e}_\theta)}{dt}=[\frac{(d\,\vec{e}_\theta)}{(d\,\theta)}]\times[\frac{(d\,\theta)}{dt}]=-\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

$$\frac{(d\,(\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta))}{dt}=(\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta-r\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$$

$$\vec{a}(M/\Re)=(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r+(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta+\ddot{z}\,\vec{e}_z$$

Remarque: on peut aussi écrire $\vec{a}(M/\Re)=(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta+\ddot{z}\,\vec{e}_z$

Démonstration: $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=\frac{1}{dt}[\frac{d}{dt}(r^2)\times\theta+r^2\frac{(d\,\dot{\theta})}{dt}]$

$$\frac{d}{dt}(r^2)=2\mathrm{r}\,\dot{r}$$

$$\frac{1}{r}(2\mathrm{r}\,\dot{r}\,\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta})=2\,\dot{r}\,\dot{\theta}+r\,\ddot{\theta}$$

On prouve donc l'égalité des deux formules précédentes.

La formule de l'accélération en coordonnées cylindriques étant relativement complexe, on va vérifier son homogénéité (pour voir qu'on ne s'est pas trompé dans les calculs et si on a bien appris le chapitre 1 !!!!).

$$[\ddot{r}]=[\frac{(d^2 r)}{dt^2}]=[L][T]^{-2}$$ c'est bien la grandeur d'une accélération.

$$[\dot{\theta}]=[\frac{(d\,\theta)}{dt}]=[\varnothing][T]^{-1}=[T]^{-1}$$

$$[r\,\dot{\theta}^2]=[L][T]^{-2}$$ ok

$$[\frac{1}{r}\frac{(d\,r^2\dot{\theta})}{dt}]=[L]^{-1}\frac{([L]^2[T]^{-1})}{[T]}=[L][T]^{-2}$$ ok

$$[\ddot{z}]=[\frac{(d^2 z)}{dt^2}]=\frac{[L]}{[T]^2}=[L][T]^{-2}$$ ok

VI. Exemples de mouvements particuliers

1. Mouvement rectiligne et uniforme dans $(\Re)$

$\vec{v}(M/\Re)=\vec{v}_0$ avec $\vec{v}_0$ vecteur constant.

Pour un mouvement rectiligne, le vecteur vitesse garde une direction constante.

Par définition, $\vec{v}(M/\Re)=\vec{v}_0=\frac{(d\,\vec{OM})}{dt}/\Re$

L'intégrale donne, $\vec{OM}=\vec{v}_0 t+\vec{C}$ avec $\vec{C}$ constante d'intégration, on la détermine grâce aux conditions initiales de l'expérience.

A $t=t_0$, $M(t_0)=M_0$

$$\vec{OM}_0=\vec{v}_0 t_0+\vec{C} \rightarrow \vec{C}=\vec{OM}_0-\vec{v}_0 t_0$$

D'où, $\vec{OM}=\vec{v}_0(t-t_0)+\vec{OM}_0$, on peut aussi écrire $\vec{M_0 M}(t)=\vec{v}_0(t-t_0)$

2. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$\vec{a}(M/\Re)=\vec{a}_0$ avec $\vec{a}_0$ une constante.

Par définition, $\vec{a}(M/\Re)=\frac{(d\,\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re=\vec{a}_0$

$$\vec{v}(M/\Re)=\vec{a}_0\times(t-t_0)+\vec{C}$$

A $t=t_0, \vec{v}=\vec{v}_0=\vec{a}_0\times 0+\vec{C}$

$M = M_0$

on a donc : $\boxed{\vec{v}(M/\Re) = \frac{(d(\vec{M_0 M}))}{dt}/\Re = \vec{a}_0(t-t_0) + \vec{v}_0}$

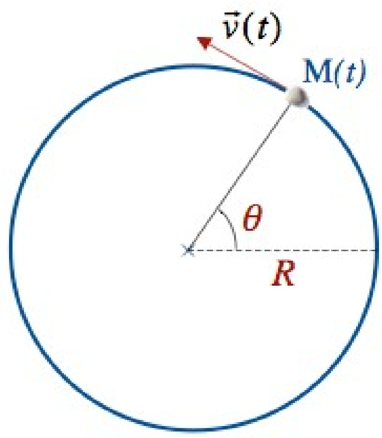
De la même façon, $\vec{M}_0 M = \vec{a}_0 \frac{[(t-t_0)^2]}{2} + \vec{v}_0(t-t_0) + \vec{D}$

$t = t_0 \quad \rightarrow \quad M = M_0$

$\vec{0} = \vec{a}_0 \times 0 + \vec{v}_0 \times 0 + \vec{D} = \vec{D}$

$$\boxed{\vec{M}_0 M = \frac{1}{2} \vec{a}_0 (t-t_0)^2 + \vec{v}_0(t-t_0)}$$

3. Mouvement circulaire



a. vecteur rotation $\vec{\omega}$

Il est caractérisé par :

- direction: colinéaire de l'axe du cercle
- sens: donne le sens de rotation du point
- norme:vitesse angulaire du point; angle dont tourne le point par unité de temps homogène à $[T]^{-1}$ (unité SI: $rad.s^{-1}$)

b. expression de la vitesse et de l'accélération

Expression de $\vec{\omega}$ vecteur rotation:

$\vec{\omega}$ est colinéaire à $\vec{e}_z$

$\|\vec{\omega}\| = \frac{(d\theta)}{dt} = \dot{\theta}$

Sens du vecteur: si $\dot{\theta} > 0$ $\vec{\omega}$ est vers le haut.

si $\dot{\theta} < 0$ $\vec{\omega}$ est vers le bas.

$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$

$\vec{v}(M/\Re)=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+\dot{z}\,\vec{e}_z$

Ici on a, r = R = constante → $\dot{r}=\frac{dr}{dt}=0$
De même z = constante → $\dot{z}=0$

On a donc $\boxed{\vec{v}(M/\Re)=R\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=R\,\omega\,\vec{e}_\theta}$

$\vec{v}(M/\Re)$ est tangent au cercle en M.

Par définition $\vec{a}(M/\Re)=(\ddot{r}-r\,\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta+\ddot{z}\,\vec{e}_z$

r = R = constante → $\ddot{r}=0$

$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta})=\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta})=\frac{R^2}{R}\frac{(d\,\dot{\theta})}{dt}=R\,\ddot{\theta}$

z = constante → $\ddot{z}=0$

$$\boxed{\vec{a}(M/\Re)=-R\,\dot{\theta}^2\vec{e}_r+R\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

c. Mouvement circulaire uniforme

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme on a : ω = constante d'où $\dot{\theta}=constante$

$\frac{(d\,\theta)}{dt}=\dot{\theta}=\omega\,constant$ → en intégrant, on a $\theta=\omega\,t+C$

On détermine C avec les conditions initiales,
A $t=t_0$ on a $\theta=\theta_0$ → $\theta_0=\omega_0 t+C$

$$\boxed{\theta=\theta_0+\omega(t-t_0)}$$

Remarque: l'accélération est uniquement centripète dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

Ce cours ainsi que l'intégralité des cours de P1 sont disponibles gratuitement à l'adresse suivante : http://coursp1bichat-larib.weebly.com

Chapitre 4 Dynamique du point matériel en référentiel galiléen

Introduction: La cinématique du point a permis de décrire le mouvement d'un point, mais sans s'occuper de ses causes: c'est la dynamique qui permet de relier le mouvement à ses causes. On peut donc écrire «dynamique = cinématique + force». On parle de dynamique newtonienne car c'est Newton qui est à la base des 3 grands principes de la mécanique du point.

I. Les 3 principes de la mécanique du point

1. Principe d'inertie

Énoncé: Il existe des référentiels privilégiés, appelés référentiels galiléens (référentiels inertiels) dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est **rectiligne** et **uniforme**.
Soit M un point matériel **isolé** c'est-à-dire qu'il n'est soumis à aucune force. Son mouvement dans un référentiel galiléen est **rectiligne** et **uniforme**. Autrement dit, $\vec{v}(M/\Re)=\overrightarrow{constante}$

Propriété : Tous les référentiels galiléens sont en mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

2. 2nde loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Remarque: Cette formule est à connaître **PAR COEUR**, elle constitue le point de départ de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen $(\Re)$, on a :

$$m\vec{a}(M/\Re)=\vec{F}$$

m est la masse inertielle du point matériel M (en kg).
$\vec{a}(M/\Re)$ est l'accélération du point matériel M (en $m.s^{-2}$)
$\vec{F}$ est la somme des forces exercées sur M (en N).

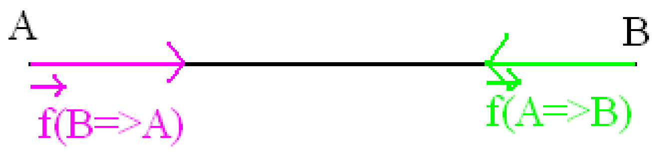
La relation fondamentale de la dynamique est cohérente avec le principe d'inertie.
Si M est un point matériel isolé, $\vec{F}=\vec{0}$. On applique le PFD au point M dans le référentiel $(\Re)$ galiléen: $m\vec{a}(M/\Re)=\vec{0} \rightarrow \vec{a}(M/\Re)=\vec{0} \leftrightarrow \vec{v}(M/\Re)=\overrightarrow{cste}$
M a donc un mouvement rectiligne et uniforme donc $(\Re)$ est galiléen.

Elle permet de montrer que les forces sont invariantes par changement de référentiel galiléen en mécanique classique :

$$\vec{F}/\Re=\vec{F}/\Re'$$

3. Principe des actions réciproques (PAR pour les intimes)

Soient A et B deux points matériels.



$\vec{f}$ (A→B) est la force exercée par A sur B.
$\vec{f}$ (B→A) est la force exercée par B sur A.

$$\vec{f}\ \textbf{(A→B) = -}\ \vec{f}\ \textbf{(B→A)}$$
$$\vec{f}\ \textbf{(A→B) colinéaire à}\ \vec{AB}$$

II. Poids d'un corps – Chute libre

1. Expression

Le Poids a pour formule $\vec{P}=m\vec{g}$
Cette force est exercée sur tout point au voisinage de la surface terrestre (autrement dit ami P1, dans chaque problème de dynamique, la première force à laquelle vous devez penser est celle-ci !!!).
m est la masse du point exprimée en kg.
$\vec{g}$ est le champ de pesanteur terrestre exprimé en $m.s^{-2}$ ou $[g] = [L][T]^{-2}$
Son origine principale est l'attraction gravitationnelle terrestre mais aussi la rotation de la Terre autour de son axe nord/sud.

Propriétés de $\vec{g}$:
$\vec{g}$ est dirigé vers le centre de la Terre.

$\|\vec{g}\|=cste=9{,}8\,m.s^{-2}$ (En P1, comme on a pas de calculette on écrira $g\approx10 m.s^{-2}$).

Remarque: en réalité $\vec{g}$ dépend de la latitude et de l'altitude.

2. Chute libre

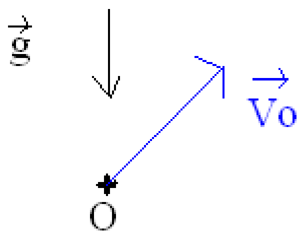
La diapo de la chute libre abordée dans le cours est le cas le plus simple que je ne redétaillerai pas ici. Je vous propose d'étudier la chute libre non pas d'un point matériel qui tombe mais d'un point matériel qu'on lance avec une vitesse initiale (ce problème ressemble beaucoup au premier exercice du premier concours blanc du tutorat de l'an passé...).

Problème:

A t = 0, on lance M à partir du point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le référentiel terrestre $(\mathfrak{R})$.
Quelle est la trajectoire de M dans $(\mathfrak{R})$?

Marche à suivre (on reprend l'explication donnée au début du chapitre 3):

- on fait un (joli) dessin (ne rigolez pas, ça se révèle souvent utile voire vital pour se sortir d'un problème de physique).



- On définit le référentiel d'étude: ici c'est le référentiel terrestre supposé galiléen.
- On définit le système matériel étudié: le point matériel M.
- On effectue le bilan des forces (ça c'est nouveau, eh oui on n'est plus en cinématique, les choses bougent et sont soumises à des forces).
  Bilan des forces: - Poids $\vec{P}=m\vec{g}$, de plus on négligera les frottements de l'air.
- On peut maintenant appliquer le PFD au point M dans $(\Re)$ galiléen.

$$m\vec{a}(M/\Re)=\vec{F}=m\vec{g}$$

NB: ce raisonnement sera celui qu'il faudra répéter maintes et maintes fois dans chaque problème de mécanique pour être le plus efficace possible. Ici cela peut vous semblez simple, mais méfiez vous, on rencontrera souvent des problèmes plus complexes dans lesquels les systèmes matériels sont soumis à plusieurs forces... (mais gardons le meilleur pour plus tard).

$$m\vec{a}(M/\Re)=\vec{F}=m\vec{g}$$

$\leftrightarrow$

$$\vec{a}(M/\Re)=\vec{g}$$

Par définition,

$$\vec{a}(M/\Re)=\frac{(d\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re=\vec{g}$$

$$\vec{v}(M/\Re)=\vec{g}\,t+\vec{C}$$

Conditions initiales, à t = 0

$$\vec{v}(M/\Re)=\vec{v}_0=\vec{C}$$

$$\vec{v}(M/\Re)=\vec{g}\,t+\vec{v}_0$$

Par définition,

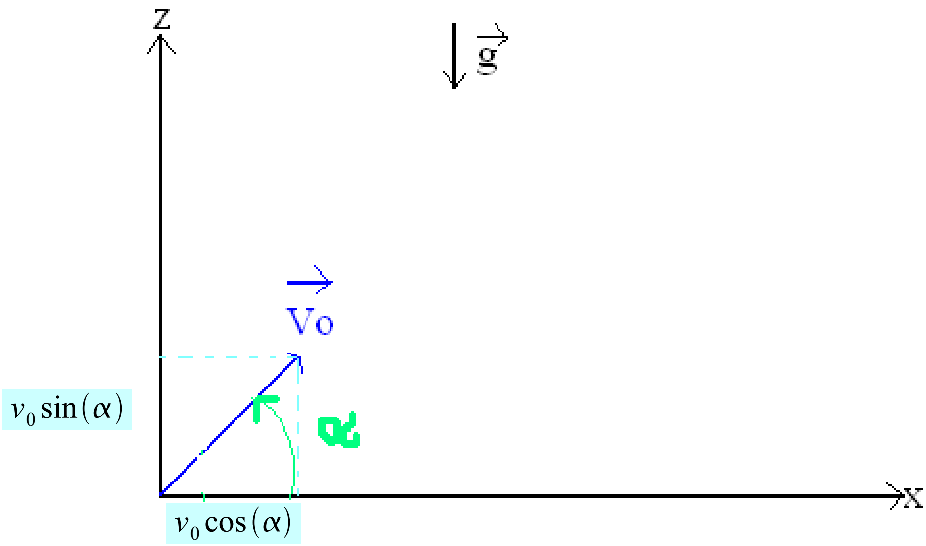
$$\vec{v}(M/\Re)=d\,\frac{(\vec{OM})}{dt}/\Re=\vec{g}\,t+\vec{v}_0$$

$$\vec{OM}=\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2+\vec{v}_0t+\vec{D}$$

A t = 0, M = 0, $\rightarrow$ $\vec{OM}=\vec{0}=\vec{D}$

$$\vec{OM}=\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2+\vec{v}_0t$$

Nous allons maintenant projeter la relation vectorielle obtenue dans un repère cartésien pour obtenir les équations horaires de M.



$\vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$

En projetant on obtient :

$\vec{v}$

- $v_x = v_0 \cos(\alpha)$
- $v_y = 0$
- $v_z = -g\,t + v_0 \sin(\alpha)$

$\vec{OM}$

- $x = v_0 \cos(\alpha)\,t$
- $y = 0$
- $z = \dfrac{-1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin(\alpha)\,t$

Dans le cas où $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$

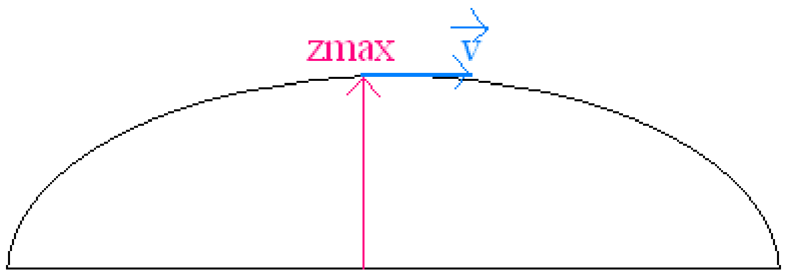
$t = \dfrac{x}{(v_0 \cos(\alpha))} \rightarrow \boxed{z = \dfrac{-g}{(2 v_0^2 \cos^2(\alpha))} x^2 + \tan(\alpha)\,x}$ Équation de la parabole

Dans le cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$x = 0$

$z = -g \dfrac{t^2}{2} + v_0 t$

Calculons la hauteur maximale de la parabole:

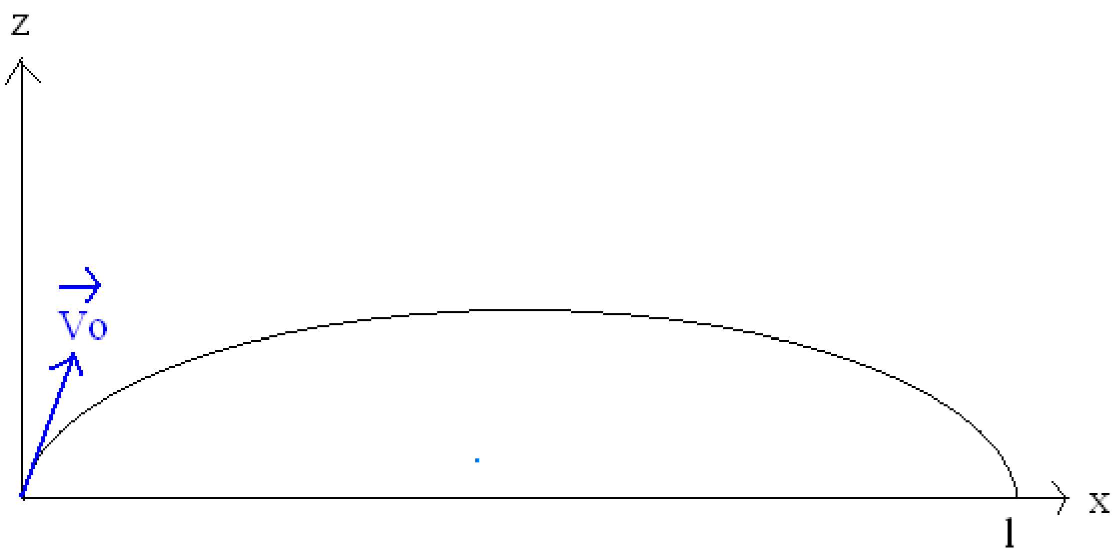


Quand on est au sommet de la parabole on a $v_z = 0 \rightarrow \quad t_1=\frac{(v_0 \sin(\alpha))}{g}$

$$z_{max}=z(t_1)=(\frac{-g}{2})\times[\frac{(v_0^2 \sin^2(\alpha))}{g^2}+\frac{(v_0^2 \sin^2(\alpha))}{g}]$$

$$\boxed{z_{max}=\frac{(v_0^2 \sin^2(\alpha))}{(2g)}}$$

Portée du tir:



$$z(x=l)=0$$

$$x=l=\frac{(2v_0^2 \cos^2(\alpha)\tan(\alpha))}{g}=\frac{(v_0^2 \times 2\cos(\alpha)\sin(\alpha))}{g}$$

$$\boxed{l=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)}$$

III. Autres forces fondamentales

1. **Force d'interaction gravitationnelle**

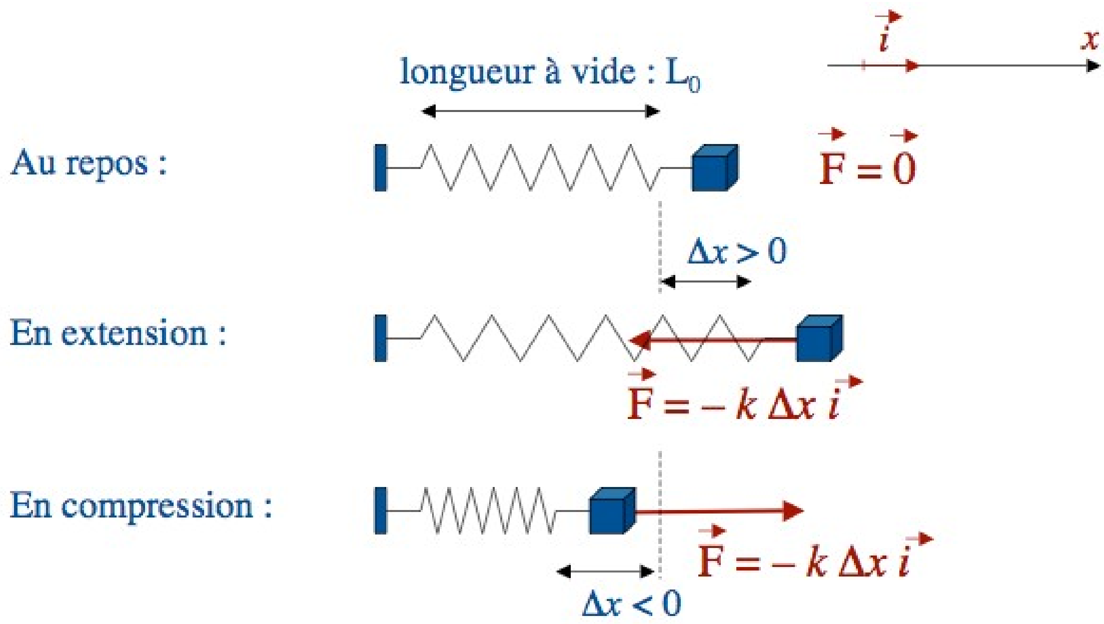
Soient M_1 et M_2 deux points matériels de masses respectives m_1 et m_2

$$\vec{F} = -G\frac{(m_1 m_2)}{r^2}\vec{e}_r$$

m1 et m2 sont exprimées en kg.
G est la constante de gravitation universelle ($G = 6{,}67.10\text{-}11\ N.m^2.kg^{-2}$).
r est la distance entre M_1 et M_2 exprimée en m.

2. **Force de rappel d'un ressort**

Le ressort possède des propriétés élastiques : il retrouve sa forme initiale après application d'une force le déformant.
Dans tous nos exercices on considérera toujours que les ressorts sont idéaux, c'est-à-dire que leur masse est nulle et il y a proportionnalité entre la force exercée et la déformation associée.



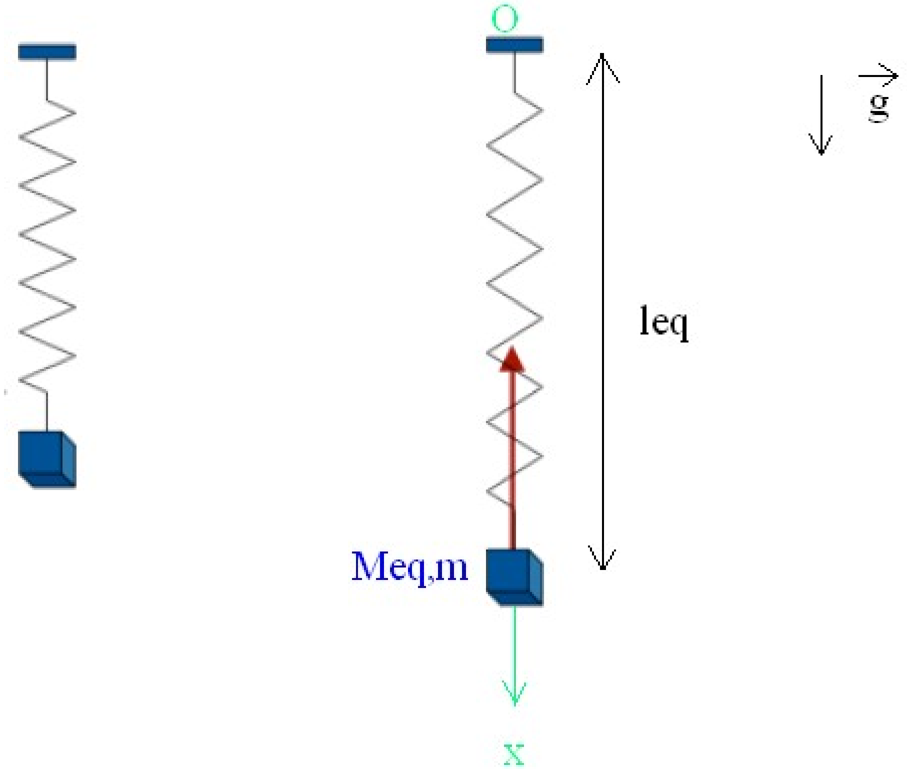
L_0 est la longueur à vide (c'est-à-dire au repos) du ressort autrement dit c'est la longueur du ressort quand il est soumis à aucune force.
$\Delta x = l - l_0$
k est la constante de raideur du ressort, positive.
$\vec{i}$ Est un vecteur unitaire, colinéaire au ressort, dirigé vers l'extérieur du ressort au niveau du point M.

On distingue 3 cas:

- en extension: $l>l_0$, le ressort est étiré. $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{i}$
- en compression: $l<l_0$, le ressort est comprimé. $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{i}$
- Au repos, $l = l_0$, le ressort est relâché. $\vec{F} = \vec{0}$

Exemple:

A t = 0, on écarte M de sa position d'équilibre et on le lance avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ verticale.



- Système étudié: le point matériel M.
- Référentiel d'étude: terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces:

- le poids $\vec{P}=m\vec{g}$
- force de rappel exercée par le ressort sur M $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{e}_x$
- on néglige les forces de frottements

On applique le PFD à M dans $(\Re)$ galiléen.

$$m\vec{a}(M/\Re)=m\vec{g}-k(l-l_0)\vec{e}_x$$

M a un mouvement rectiligne selon (Ox). On a donc:

$$\vec{a}(M/\Re)=\ddot{x}\vec{e}_x$$

D'où $$m\ddot{x}\vec{e}_x=m\vec{g}-k(x-l_0)\vec{e}_x$$

$\leftrightarrow$ $$m\ddot{x}\vec{e}_x=mg\vec{e}_x-k(x-l_0)\vec{e}_x$$

$\leftrightarrow$ $$m\ddot{x}=mg-k(x-l_0)$$

Conditions initiales:

A t = 0, x(0) = x_0, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = \dot{x}(0)\vec{e}_x \rightarrow \dot{x}(0) = v_0$

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$

$$\leftrightarrow \quad \ddot{x} = g - \frac{k}{m}(x - l_0)$$

$$\leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}l_0$$

On a obtenu une équation différentielle pour x(t) d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants, avec un second membre constant.
On va résoudre cette équation différentielle (la démarche sera toujours la même).

Résolution:

$$x(t) = x_p + x_h$$

x_p est la solution particulière de l'équation avec second membre.
x_h est la solution générale de l'équation sans second membre.

On détermine d'abord x_p. Quand le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante. Le second membre de l'équation est constant, on cherche donc un x_p constant.

$$\ddot{x}_p = 0 \rightarrow \frac{k}{m}x_p = g + \frac{k}{m}l_0 \leftrightarrow \boxed{x_p = g\frac{m}{k} + l_0}$$

On détermine ensuite x_h:
On écrit l'équation <u>sans second membre</u>:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Remarque: $[\omega_0] = [T]^{-1}$

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ C'est l'équation d'un oscillateur harmonique, on la retrouvera dans de nombreux problèmes.

La solution de cette équation est de la forme $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ Cette formule est à savoir par cœur !!!!

<u>Solution générale:</u>

$x(t) = x_p + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

On détermine A et B à l'aide des conditions initiales du problème.

CI: $x(0) = x_0 = x_p + A \rightarrow A = x_0 - x_p$

$\dot{x}(0) = v_0$

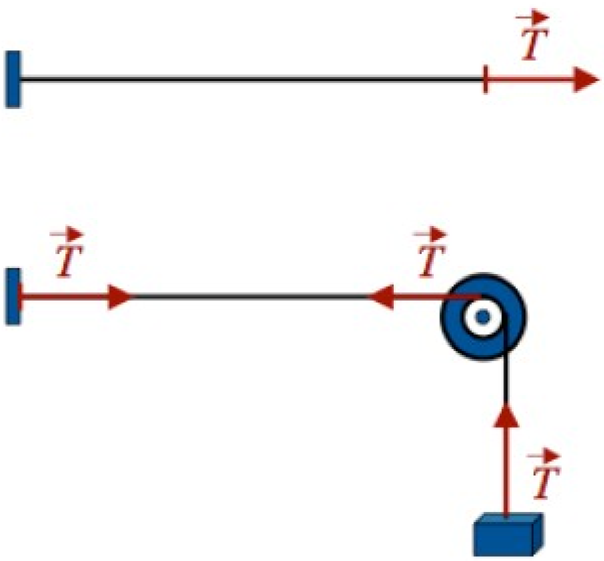
En dérivant x(t) on a :

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}$

On a donc : $x(t) = x_p + (x_0 - x_p)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

3. Tension d'une corde



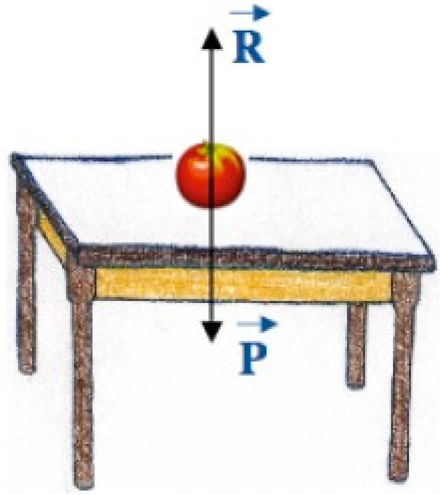
Un fil est considérer comme idéal si il est inextensible et de masse nulle.
La force de tension exercée sur la corde est colinéaire à celle-ci. De plus elle est uniforme, c'est-à-dire identique en tout point du fil.
Attention: T est une inconnue, pour la déterminer il faudra utiliser un théorème de mécanique.

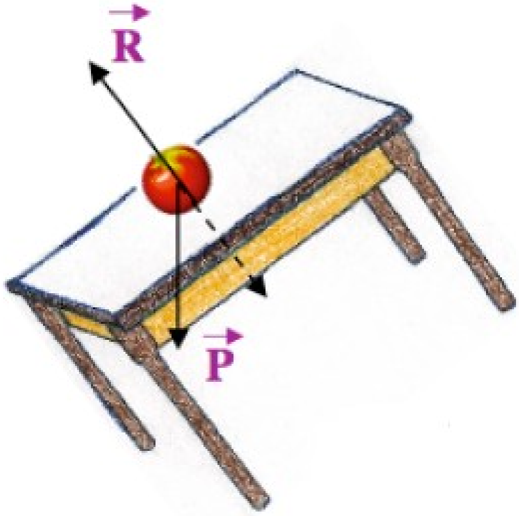
4. Réaction d'un support

a. Sans frottements

Si M se déplace sur un support quel qu'il soit, il existe une action exercée par ce support sur le point M qui est appelée **réaction du support**. C'est une inconnue qui doit être déterminer en utilisant un théorème mécanique (généralement le PFD).
En l'absence de frottements, la réaction du support est toujours orthogonale au support c'est

pourquoi on parle de **réaction normale** du support et on écrit $\vec{R}=\vec{N}$.



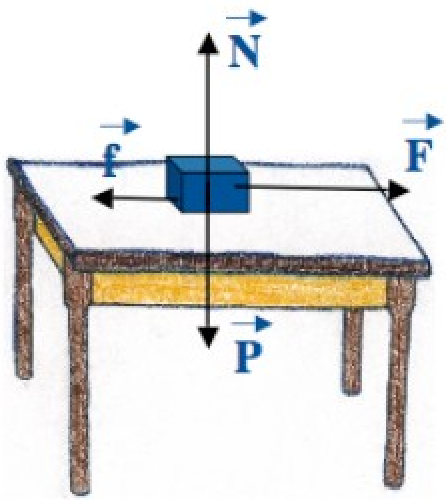


b. avec frottements

Cette fois-ci la réaction du support comporte deux composantes:

- la composante normale orthogonale au support (la même que précédemment)
- la composante tangentielle tangente au support (due à l'existence de frottements).

On écrit alors : $\vec{R}=\vec{N}+\vec{f}$



Remarque: la force de frottement s'oppose toujours au mouvement...

c. Lois de Coulomb du frottement solide

Il existe une vitesse de glissement de M par rapport au support, on la note $\vec{v}_g$ définie par :

$$\vec{v}_g=\vec{v}(M/\Re)-\vec{v}(support/\Re)$$

On distingue 3 cas:

- Si le support est fixe dans $(\Re)$, on a $\vec{v_g}=\vec{v}(M/\Re)$
- Si il n'y a pas de glissement de M sur le support, on a $\vec{v_g}=\vec{0}$ si et seulement si la condition de validité suivante $\|\vec{f}\|<k\|\vec{N}\|$ est vérifiée.
- Si il y a glissement de M sur le support, on a $\vec{v_g}\neq\vec{0}$ si et seulement si la condition de validité suivante $\|\vec{f}\|=k\|\vec{N}\|$ est vérifiée.

k est appelé coefficient de frottements, k > 0 et n'a pas de dimension. k dépend des matériaux en contact.

Remarque: je pense que ce dernier paragraphe sur les lois de Coulomb a très peu de chance d'être demander à l'examen car il aborde des notions un peu complexe pour la P1, cependant comme il faisait partie d'une diapo de l'an passé, j'ai préféré le retranscrire ici pour plus de sécurité.

5. Force de frottement fluide

C'est une force de frottement intervenant entre un corps et un fluide (un fluide peut être un liquide **ou** un gaz).
Elle dépend de la vitesse relative de ce corps par rapport au fluide.
On utilise deux modèles classiques pour définir la force de frottement fluide.

- Le premier modèle est le modèle linéaire (ou «faible vitesse») $\vec{F}=-k\vec{v}$
- Le deuxième modèle est non linéaire et est utilisé pour les grandes vitesses $\vec{F}=-k\,v^2\vec{u_v}$

Le coefficient k dépend du fluide (notamment de sa viscosité) et de la forme géométrique du corps.
$[k] = [M][T]^{-1}$

Influence des frottements sur la vitesse: la vitesse tend vers une vitesse constante.

Exemple: (on reprend le problème initial de la chute libre en prenant en compte les frottements de l'air qui s'exercent sur M).

<u>Rappel des conditions initiales:</u>

à t = 0, M = 0 et v = v_0

- Système étudié: le point matériel M
- Référentiel d'étude: le référentiel terrestre supposé galiléen $(\Re)$
- Bilan des forces

– poids $\vec{P}=m\vec{g}$
– force de frottement de l'air sur M, hypothèse de modélisation linéaire $\vec{f}=-k\vec{v}(M/\Re)$

On applique le PFD à M dans $(\Re)$ galiléen:

$$m\vec{a}(M/\Re)=m\vec{g}-k\vec{v}(M/\Re)$$

Résolution:

$$\vec{a}(M/\Re)=\frac{(d\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re=\vec{g}-\frac{k}{m}\vec{v}(M/\Re)$$

Attention: on ne peut pas intégrer $\vec{v}(M/\Re)$!!!!!!!

$$\frac{m}{k}\frac{(d\,\vec{v}(M/\Re))}{dt}/\Re+\vec{v}(M/\Re)=\frac{m}{k}\vec{g}$$

On est face à une équation différentielle d'ordre 1, linéaire, à coefficients constants, avec un second membre constant, vérifiée par $\vec{v}(M/\Re)$.

Pour simplifier les notations, on pose : $\tau=\frac{m}{k}$ et $v_{\vec{limite}}=\frac{m}{k}\vec{g}$

On doit donc résoudre $\tau\frac{(d\,\vec{v})}{dt}+\vec{v}=v_{\vec{limite}}$ on rappelle que τ et $v_{\vec{limite}}$ sont des constantes.

<u>Résolution</u> (même démarche que pour le problème du ressort, eh oui la physique c'est assez répétitif...):

$\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{v}_h$

$\vec{v}_p$ est la solution particulière de l'équation avec second membre.
$\vec{v}_h$ est la solution générale de l'équation sans second membre.

Déterminons $\vec{v}_p$:

Quand le second membre est constant, on cherche une solution particulière constante.
On cherche donc $\vec{v}_p=\vec{cste}$

$\rightarrow\quad \tau\times 0+\vec{v}_p=v_{\vec{limite}}$

$\rightarrow\quad \vec{v}_p=\vec{v}\,limite=\frac{m}{k}\vec{g}=\tau\,\vec{g}$

Déterminons $\vec{v}_h$:

On écrit l'équation <u>sans second membre</u>:

$$\tau\frac{(d\,\vec{v})}{dt}+\vec{v}=\vec{0}$$

$\vec{v}_h=\vec{\lambda}\exp\frac{-t}{\tau}$

Solution générale:

$\vec{v}=v_{\vec{limite}}+\vec{\lambda}\exp\frac{-t}{\tau}$

Déterminons $\vec{\lambda}$:

On utilise les conditions initiales, à t = 0, on a $\vec{v}=\vec{v}_0=v_{\vec{limite}}+\vec{\lambda}\ \rightarrow\ \vec{\lambda}=\vec{v}_0-v_{\vec{limite}}$

$$\vec{v}=\frac{(d\vec{OM})}{dt}=v_{\vec{limite}}+(\vec{v}_0-v_{\vec{limite}})\exp\frac{-t}{\tau}$$

$$\vec{OM}=v_{\vec{limite}}t-\tau\exp\frac{-t}{\tau}(\vec{v}_0-v_{\vec{limite}})+\vec{C}$$

On utilise les conditions initiales, à t = 0, on a M = 0

$\rightarrow \quad \vec{0}=\vec{0}-\tau(\vec{v}_0-v_{\vec{limite}})+\vec{C}$

$\rightarrow \quad \vec{C}=\tau(\vec{v}_0-v_{\vec{limite}})$

D'où $$\vec{OM}=v_{\vec{limite}}t+\tau(\vec{v}_0-v_{\vec{limite}})(1-\exp\frac{-t}{\tau})$$

IV. Quantité de mouvement

On définit la quantité de mouvement de manière suivante :

$$\vec{p}(M/\Re)=m\vec{v}(M/\Re)$$

Le théorème de la quantité de mouvement donne:

$$\frac{(d\,\vec{p}(M/\Re))}{dt}/\Re=\vec{F}$$