oscillateurs et ondes progressive

Ce cours reprend le cours de madame Grenier de 2007, il constitue une aide et en aucun cas une référence pour le concours !

C'est un résumé du cours de madame Grenier, reprenant ce qu'il y a à savoir pour le concours, les démonstrations des résultats ne sont pas tous présent dans ce cours, vous devrez vous référer aux PDF du prof.

1-oscillateurs parfaits

a) caractéristiques

Un oscillateur (pendule, ressort,…) possède plusieurs caractéristiques fondamentales :

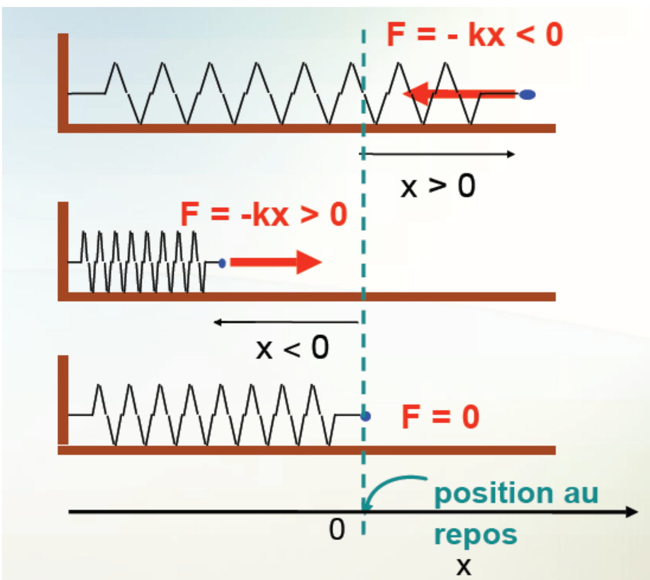
-il possède un mouvement périodique (il a donc une période T, une fréquence υ)
-ce mouvement périodique est due a une transformation de l'énergie cinétique en énergie potentiel(et vice-versa).

Un oscillateur parfait possède les mêmes caractéristiques qu'un oscillateur, mais :

-il transforme TOUTES l'énergie cinétique en énergie potentiel (et vice-versa), il n'y a pas de perte d'énergie .
-Son amplitude est alors constante dans le temps.

b) mise en équation

On vous demandera souvent de déterminez l'équation de mouvement d'un oscillateur, c'est l'équation qui donne la position d'un point au cours du temps, il existe une méthode, elle est la même pour tous les oscillateurs, par exemple pour le ressort :



- Je choisis un axe de repère si l'on ne me l'impose pas dans l'énoncé, ici les $x<0$ sont vers la gauche.

- Quelles sont les conditions initiales ?

Bon les conditions initiales ici ne sont pas précisées, mais sachez qu'on vous en donnera dans l'énoncé, ce sont des conditions particulières à $t=0$.
De plus, on suppose ici (ce n'est pas indiquer mais ca le sera lors d'un exercice) qu'il n'y a pas de frottement.

- Bilan des forces :

On cherche à savoir quelles sont les forces **<u>qui agissent sur le ressort</u>**, pour cela on se pose 2 questions fondamentales :

→A quoi touche le système (ici le ressort) ?

Il touche le support, il y a donc une intensité R dirigés vers le haut.
Nous donnons une petite impulsion au ressort vers les $x<0$ (ou l'inverse peut importe, mais dans ce sens c'est plus facile), imaginez-vous en train de comprimé se ressort, vous poussez vers les $x<0$, le ressort réagit donc avec une force dirigés vers les $x>0$, cette force a donc pour expression :

$$F = -kx$$

car si $x<0$, la force est > 0, si $x>0$ la force est < 0

Si vous n'avez toujours pas compris, dites vous que la force se dirige toujours vers le point de repos, comme ca vous vous tromperez jamais de sens !

→ Par quoi le système est-il attiré ?

(il n'y a pas 36000 solutions à notre niveau, soit c'est une force d'attraction entre deux masse, et sur terre c'est la gravité, ou une force électrostatique)
Ici seul la gravité exerce une attraction sur le ressort, on a donc une force P dirigés vers le bas.

Selon le PFD, a l'équilibre la somme des forces extérieures sont égales a 0, on a donc ici, verticalement, $P+R = 0$ (ces deux forces s'annulent tout le temps, elle n'entre d'onc pas en considération pour l'équation), et horizontalement $F= -kx$.

Selon le principe de newton encore, on a F_{totale} = masse x accélération

On a donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x$$

(Remarque: d^2x est la notation mathématique pour designer la dérivée seconde, dt^2 c'est dt au carrée.)
On a donc :
$d^2x/ dt^2 + k/m\ x = 0$, c'est une équation différentielle de second ordre du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est la plus simple des équations différentielles du second ordre, reportez vous au cours de mécanique d'Anne-Cécile pour la résolution d'une telle équation. Ainsi les solutions sont du type :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \\ x &= a\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ x &= a\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}}$$

On a donc: $\sqrt{k/m} = w_0 \Leftrightarrow k/m = w_0^2$.

Remarque :
toutes ces solutions sont équivalentes, on peut passer du cos au sin par cos(a) = sin (a + π/2).
La solution $x = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$ peut être obtenue à l'aide de la formule de trigo : cos (a+b) ou sin (a+b).

A= l'amplitude de l'onde.

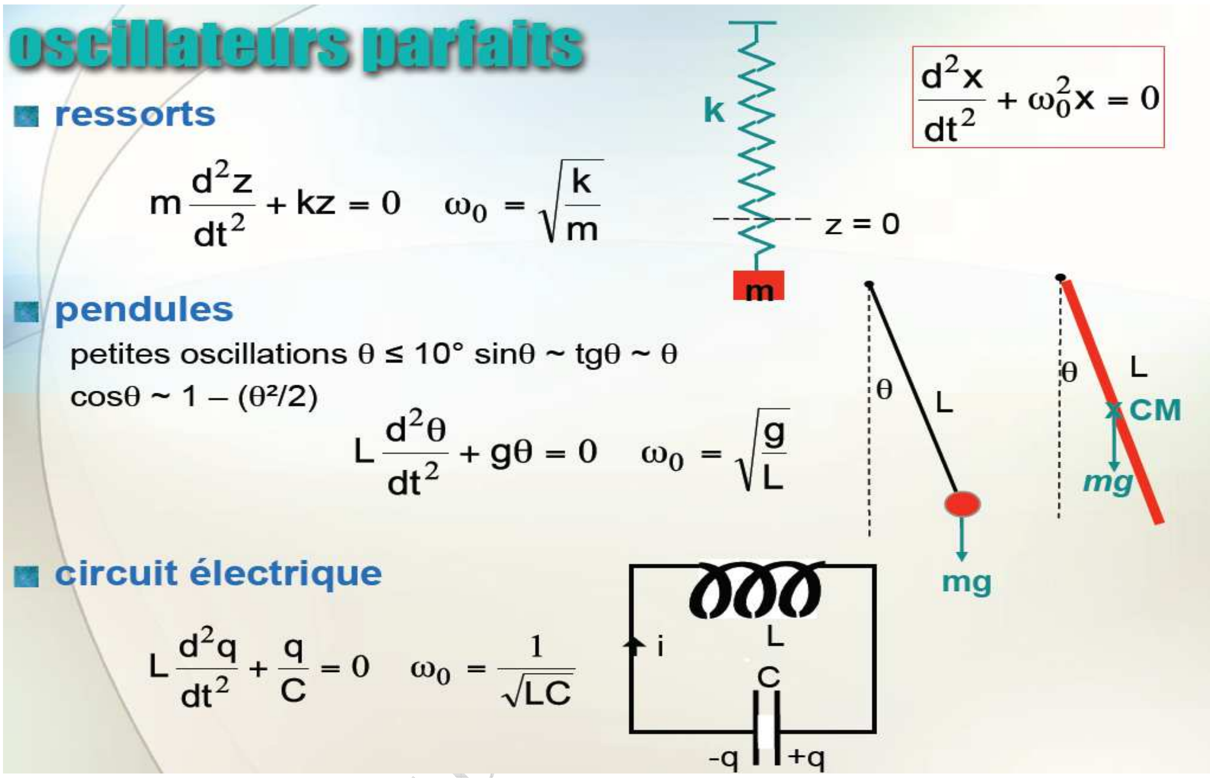
ω = la pulsations, elle s'exprime en rad/s (on verra souvent écrit s-1, le radian étant en réalité un nombre)

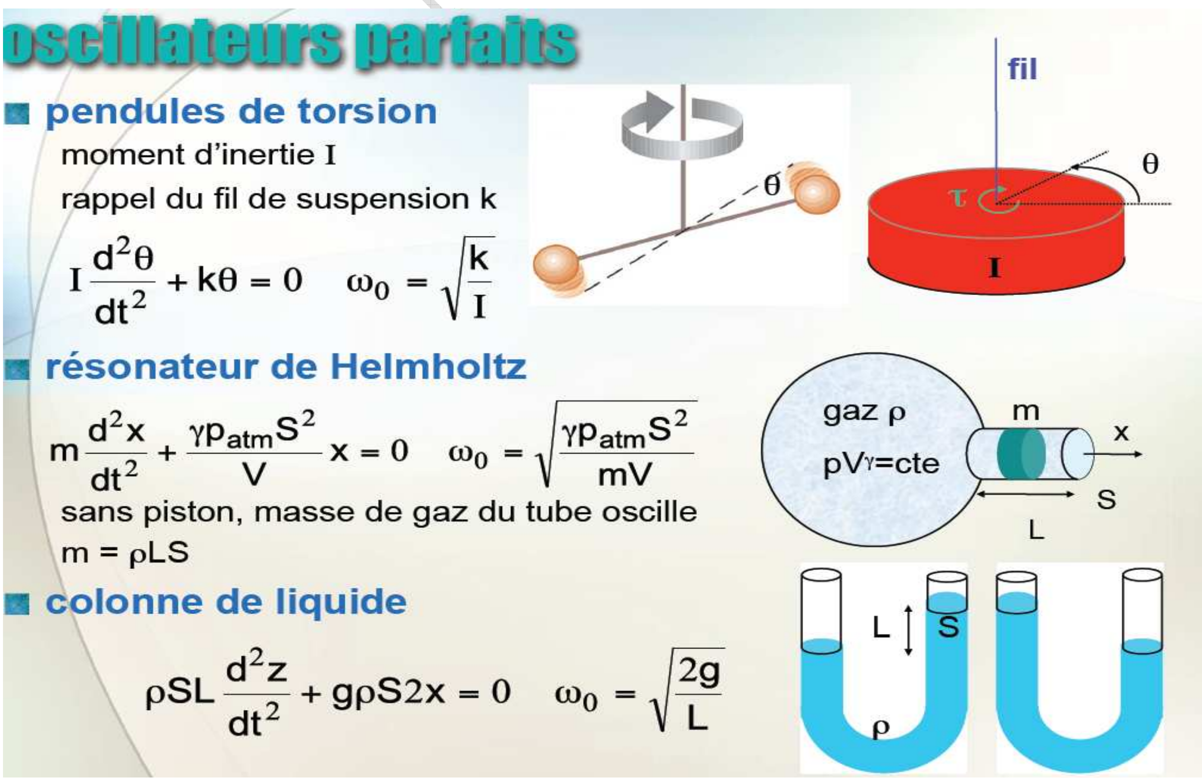
φ = le phase à l'origine. A l'origine des temps, l'amplitude de l'onde n'est pas forcément nul , elle peut être par exemple maximal, et dans ce cas, si par exemple on a choisit les solutions de type cos, φ doit nécessairement être égal a 0 car a t=0 on doit avoir cos (ωt + φ) =1 (pour avoir une amplitude max) donc φ = 0. L'amplitude peut également être égale a la moitié, au quart… Selon les conditions initiales, on pourra trouver l'angle φ.
φ est donc déterminé par les conditions initiales.

La pulsation, la fréquence et la période, sont reliées par les relations suivantes :

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\nu_0 \qquad T_0 = 1/\nu_0}$$

On trouve de multiples exemples d'oscillateurs parfaits, on a toujours le même type d'équation, en incluant quelques approximations :





ce sont des exemples, ils ne sont pas à savoir par cœur mais à comprendre. Généralement dans les exos, on cherche toujours à obtenir ω, A et φ étant données par les conditions initiales.

c) *Energie d'un oscillateur*

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = cte$$

$$\overline{E}_{cin} = \overline{E}_{pot} = \frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} E_{tot}$$

Ici a = la position initiale.

d) *principe de superposition :*

- si $x_1(t)$ = mvt résultant de l'action de la force F_1
- si $x_2(t)$ = mvt résultant de l'action de la force F_2

Alors

$x_1(t)+x_2(t)$ = mvt résultant de l'action combinée de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$

e) *La résonnance* :

Lorsqu'on abandonne un système stable préalablement écarté de sa position d'équilibre, il y retourne, généralement à travers **des oscillations propres**. Celles-ci se produisent à la **fréquence propre du système**. Si le système n'est pas trop amorti, une excitation sinusoïdale est **particulièrement amplifiée** au voisinage de cette fréquence propre, c'est ce qu'on appelle la **résonance.**

2- Ondes progressives

a) *équation d'onde*

Une onde progressive, est une onde qui se propage dans l'espace, son équation inclus donc un nouveau terme qui dépend de la position.
L'équation fondamentale d'une onde progressive est nommée équation d'onde ou encore équation d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Si de plus cette onde progressive est sinusoïdale elle doit vérifiée l'équation précédente ET :

$$\boxed{\text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}}$$

Ainsi on détermine les solutions d'une telle équation :

$$\boxed{u(x,t) = u_a \sin(\omega t \pm kx) \text{ ou } u_a \cos(\omega t \pm kx)}$$

Soit une onde sinusoïdale d'équation $u(x,t) = u_a \cos(\omega t + \text{ou} - kx)$
Si on dérive deux fois u(x,t) par rapport à x, on obtient : + ou - ua $k^2 \cos(\omega t + \text{ou} - kx)$
Si on dérive deux fois u(x,t) par rapport à t, on obtient : + ou - ua $\omega^2 \cos(\omega t + \text{ou} - kx)$
Comme cette onde est progressive et sinusoïdale, elle doit vérifiée les 2 équations :
On a donc $k^2 = \omega^2/c^2$, comme elle est sinusoïdale, on a aussi k = + ou - ω/c
Dans cette équation k est le vecteur d'onde, il s'exprime en m^{-1}, et il est relié aux autres paramètres par la relation suivante :

$$\boxed{\Rightarrow c = \left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{\omega}{k}}$$

Ou encore

$$\sigma = 1/\lambda \text{ nombre d'onde}$$
$$k = 2\pi\sigma = 2\pi/\lambda \text{ vecteur d'onde}$$

Le signe + est utilisé quand l'onde se propage vers les x<0
Le signe – est utilisé quand l'onde se propage vers les x>0

On a donc (idem avec cos) :

$$\sin(\omega t - kx) \text{ vers les } x \uparrow$$

$$\sin(\omega t + kx) \text{ vers les } x \downarrow$$

On remarque que cette équation possède une bi-périodicité :

Périodicité spatiale (T)
Périodicité temporelle (λ)

Ces deux périodes sont reliées par la relation :

$$\boxed{\lambda = cT \iff \lambda\nu = c}$$

b) Vitesse de propagation :

Chaque onde qui se propage possède par définition une vitesse, notée c , la vitesse ne dépend, en générale, que du milieu où se propage l'onde : elle dépend de l'élasticité du milieu (force de rappel) et de sa densité (inertie) :

$$c = \sqrt{\frac{\text{rappel}}{\text{inertie}}}$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

On a pour une corde :

$$c = \sqrt{\frac{T_o}{\mu}}$$

Avec :

T_0 la tension de la corde

μ sa densité linéique (dm/dx, kg/m, on connaît bien la densité volumique, kg/m^3, ici c'est pareil sauf que l'on se considère que la corde est une ligne).

Pour un gaz parfait, on a :

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{m}}$$

Avec :

p_0 est la « pression hors onde » c'est-à-dire la pression qui règne dans le gaz en dehors de la zone spatial ou se trouve l'onde : en effet, le gaz se comprime au passage de l'onde, on considère donc la pression qui réside en dehors de cette zone où l'onde est présente.

ρ_0 est de la même façon la densité volumique de l'onde en dehors de la zone où elle est présente.

γ est une constante thermodynamique du gaz (γ = Cp/Cv pour un gaz parfait diatomique, je crois que c'est hors programme, sauf si cela a été abordé lors du cours de thermo sur les gaz).

k est la constante de Boltzmann (=$1{,}3806503 \times 10^{-23}\ m^2\ kg\ s^{-2}\ K^{-1}$).

M la masse molaire, m la masse, R la constante des gaz parfaits, et T la température.