TMC - Forces centrales - Forces newtoniennes

A) TMC

1) Définitions

- **Moment cinétique de M dans $\mathcal{R}$ par rapport au point A :**

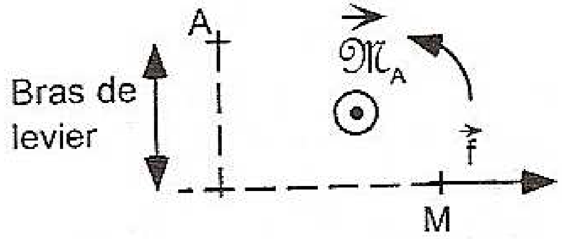
$$\boxed{\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

- **Moment de la force $\vec{f}$ agissant sur M par rapport au point A :**

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}}$$

$\vec{\mathcal{M}}_A$ tend à faire tourner M autour de A dans le sens donné par la règle du tire-bouchon par rapport à $\vec{\mathcal{M}}_A$.

$||\vec{\mathcal{M}}_A|| = ||\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}|| = ||\overrightarrow{AM}|| \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{AM},\vec{f}})| \times ||\vec{f}||$; d'autant plus grand que le **bras de levier** $||\overrightarrow{AM}|| \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{AM},\vec{f}})|$ est grand.



2) Enoncés

Théorème du Moment cinétique à M dans $\mathcal{R}$ galiléen par rapport au point A FIXE dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$$

Résumé de mécanique II

1) Travail, puissance

Travail infinitésimal d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$:

$$\delta W(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\vec{v}(M/\mathcal{R})dt$$

où $d\overrightarrow{OM}$ représente le vecteur déplacement infinitésimal de M sur sa trajectoire dans $(\mathcal{R})$ entre t et $t+dt$ (tangent à la trajectoire de M dans $(\mathcal{R})$, dans le sens du mouvement, de norme égale à un petit élément de longueur de la trajectoire.)

Travail d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$:

$$W_{M_1M_2}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \int_{M_1 \to M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{v}(M/\mathcal{R})dt$$

où $M_1 = M(t_1)$ et $M_2 = M(t_2)$. Ce travail dépend en général de la trajectoire suivie par le point entre M_1 et M_2.

Puissance d'une force $\vec{F}$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$:

$$\mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F}.\vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Unités SI : de travail : le Joule (J) ; de puissance : le Watt (W).

Exemple : force $\vec{F}$ constante en norme et constamment opposée au vecteur vitesse de M dans $(\mathcal{R})$: $W_{M_1M_2}(\vec{F}/\mathcal{R}) = -||\vec{F}||\ell_{M_1M_2}$, où $\ell_{M_1M_2}$ est la longueur de la trajectoire suivie par M de M_1 à M_2.

Propriété : Les forces constamment orthogonales au déplacement de M dans $(\mathcal{R})$ ne travaillent pas dans $(\mathcal{R})$. *Ex :* tension du fil pour un pendule simple ; réaction normale au support dans le référentiel lié au support.

2) Energie potentielle

a) Définition

Force conservative $\vec{F}$; énergie potentielle associée $E_p(M)$:

$\vec{F}$ est une force conservative si et seulement si

$$\delta W(\vec{F}/\mathcal{R}) = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p, \forall\ d\overrightarrow{OM}$$

où dE_p représente la différentielle de l'énergie potentielle E_p associée à $\vec{F}$.
E_p est définie à une constante additive près arbitraire.
En pratique, une force est conservative lorsqu'elle ne dépend que de la position du point.

b) CP :

Force conservative $\vec{F}$; énergie potentielle associée $E_p(M)$:

Si $\delta W(\vec{F}/\mathcal{R})$ se met sous la forme $\delta W(\vec{F}/\mathcal{R}) = f(\alpha)d\alpha$, où α est une variable d'espace quelconque, alors $\vec{F}$ est conservative et E_p est telle que

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = -f(\alpha)$$

c) Travail d'une force conservative :

Travail d'une force $\vec{F}$ conservative d'énergie potentielle associée $E_p(M)$:

$$W_{M_1M_2}(\vec{F}/\mathcal{R}) = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

Le travail d'une force conservative de M_1 à M_2 ne dépend pas du trajet suivi entre M_1 et M_2.

d) Ex de forces conservatives :

- Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$; $E_p = mgz$, z verticale ascendante.
- La force de rappel d'un ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_{ext,M}$; $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$
- La force de gravitation entre deux masses ponctuelles, m_0 en O fixe, m en M : $\vec{F} = \frac{-Gmm_0\overrightarrow{OM}}{OM^3}$; $E_p = \frac{-Gmm_0}{OM}$
- La force électrostatique entre deux charges ponctuelles, q_0 en O fixe, q en M : $\vec{F} = \frac{qq_0\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$; $E_p = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 OM}$

3) Théorèmes

a) Energies

- Energie cinétique de M dans $\mathcal{R}$: $E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m||\vec{v}(M/\mathcal{R})||^2$
- Energie mécanique de M dans $\mathcal{R}$: $E_m(M/\mathcal{R}) = E_c(M/\mathcal{R}) + E_p(M)$ où E_p est la somme des énergies potentielles associées à chacune des forces conservatives agissant sur M.

b) Théorèmes de l'énergie et de la puissance cinétiques

TPC : Théorème de la Puissance Cinétique dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen:

$$\frac{dE_c(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}/\mathcal{R})$$

où $\vec{F}$ est la force totale agissant sur M dans R.

TEC : Théorème de l'Energie Cinétique dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen de M_1 à M_2 :

$$E_c(M_2/\mathcal{R}) - E_c(M_1/\mathcal{R}) = W_{M_1M_2}(\vec{F}/\mathcal{R})$$

c) Théorèmes de l'énergie et de la puissance mécaniques

TPM : Théorème de la Puissance Mécanique dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen:

$$\frac{dE_m(M/\mathcal{R})}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{NC}/\mathcal{R})$$

où $\vec{F}_{NC}$ est la force totale non conservative agissant sur M dans R.

TEM : Théorème de l'Energie Mécanique dans un référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen de M_1 à M_2 :

$$E_m(M_2/\mathcal{R}) - E_m(M_1/\mathcal{R}) = W_{M_1M_2}(\vec{F}_{NC}/\mathcal{R})$$

d) Mouvement conservatif

Le mouvement de M dans $\mathcal{R}$ est conservatif ssi toutes les forces qui travaillent sont conservatives.
On a alors :
TEM : $E_m(M/\mathcal{R})$=constante
TPM : $\frac{dE_m(M/\mathcal{R})}{dt} = 0$

e) Commentaires et exemples

Les théorèmes de la puissance permettent de retrouver l'équation du mouvement (aussi déterminable par le PFD) ; les théorèmes de l'énergie permettent d'établir des intégrales premières du mouvement.

Exemple : pendule simple

$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Longrightarrow E_c(M/e_\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
BdF :
– poids : conservatif : $E_p = mgz = -mgl\cos\theta$
– tension du fil : ne travaille pas dans $\mathcal{R}$.
La seule force qui travaille est conservative $\Longrightarrow$ le mouvement est conservatif :
$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = E_0$ constant, déterminée éventuellement par les CI.
$\frac{dE_m}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}mgl\sin\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

SYSTÈMES DE COORDONNÉES ET CINEMATIQUE

* Base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ BASE GLOBALE

$M(x, y, z)$

⊕ vecteur infinitésimal

$$\boxed{\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{a}(M/R) = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}}$$

* Base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ BASE LOCALE

– expression des coordonnées cartésiennes en cylindrique

$$\boxed{x = r\cos\theta}$$

$$\boxed{y = r\sin\theta}$$

⊕ vecteur infinitésimal

$$d\vec{OM} = \vec{MM'}$$
$$= \vec{MM_r} + \vec{MM_\theta} + \vec{MM_z}$$
$$= dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$$

$M(r, \theta, z)$

$$\boxed{\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{a}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{a}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$$

– projec° de la base cylindrique dans la base cartésienne

$$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_z} = \vec{e_z}$$

* Base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ BASE LOCALE

$\vec{e_\theta}$ → colatitude

$\vec{e_\varphi}$ → longitude

– expression des coordonnées cartésiennes en sphérique

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

⊕ vecteur infinitésimal

$$d\vec{OM} = \vec{MM_r} + \vec{MM_\theta} + \vec{MM_\varphi}$$
$$= dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{e_r}}$

$\boxed{\vec{v}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}}$

- projec° de la base sphériq ds la base cartésienne

$\boxed{\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e_x} + \cos\varphi\,\vec{e_y}}$

$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\varphi\,\vec{e_y}$

$\boxed{\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{e_z} + \sin\theta\,\vec{u}}$

$\boxed{\vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{e_z}}$

mouvement circulaire

$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e_z}}$

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

$\boxed{\vec{v}(M/R) = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\omega\,\vec{e_\theta}}$

$\boxed{\vec{a}(M/R) = -R\dot{\theta}\,\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}}$